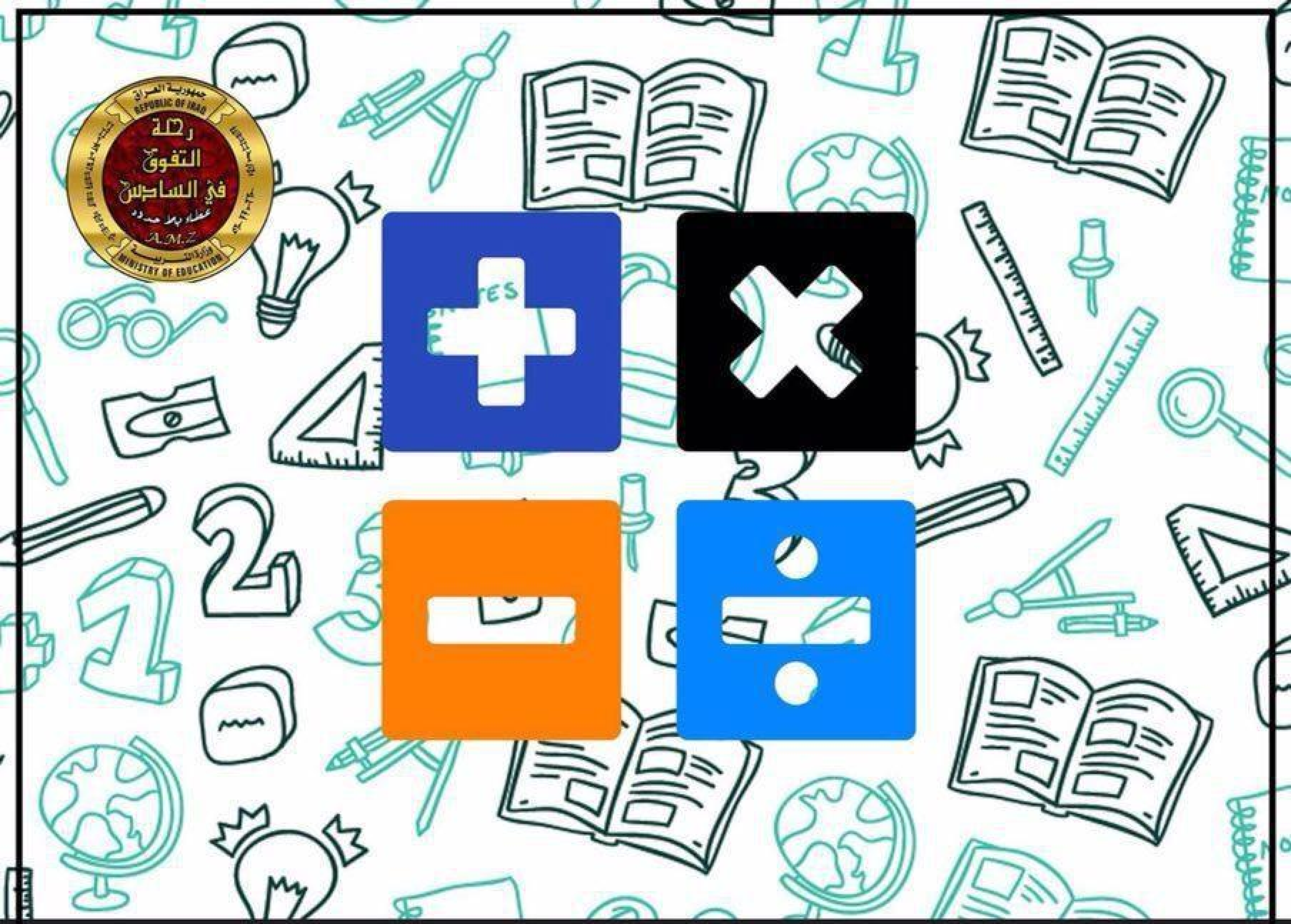


2017

مساعد الطالب في..

الرياضيات

للصف السادس ألادبي

اعداد الاستاذ

حسين فاضل الخماسي

زورونا على الموقع التواصل الأجتماعي

@رحلة التفوق في السادس

تصميم وسام

الفصل الاول ـ مبدأ العد (العبارات الأولية)

يستخدم مبدأ العد ان وجد في السؤال كلمه (يسمح ، لا يسمح ، زي) .

١ ــ رتب الاعداد تصاعديا اذا كانت غير مرتبة

٢ ــ الخط الاول يتأثر بالعوامل الاتية :

أ ــ كلمة اكبر ⟸ عدد الطرق = عدد الاعداد الاكبر من العدد المعطى + (١)

ب ــ كلمة اقل (لا يزيد) ⟸ عدد الطرق = عدد الاعداد الاصغر من العدد المعطى فقط

ج ــ عدد زوجي او فردي ⟸ عدد الطرق = الاعداد الزوجية او الفردية وحسب المطلوب

د ــ مضاعفات العدد ⟸ عدد الطرق = مضاعفات العدد الموجودة في السؤال

هـ ـ قابلية القسمة ⟸ عدد الطرق = عدد الاعداد التي تقبل القسمة وبدون باقي

٣ ــ بقية الخطوط تتأثر بالعوامل الاتية :

أ ـ مسموح به ⟸ عدد الطرق = بقدر الاعداد الموجودة في السؤال

ب ــ غير مسموح به ⟸عدد الطرق = في كل مرتبة تقل واحد

٤ ــ عدد الطرق : هو حاصل ضرب الارقام الموجودة في كل خط

رمز الاعداد : هو عدد المراتب التي يتكون منها العدد (احاد ، عشرات ، مئات ، الاف ...)

طريقة الحل //

- اذا كان الرمز يتكون من رقمين :

عدد طرق اختيار الاحاد

عدد طرق اختيار العشرات

- اذا كان الرمز يتكون من ثلاث ارقام (مراتب):

عدد طرق اختيار الاحاد

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

- اذا كان الرمز يتكون من اربع ارقام (مراتب):

عدد طرق اختيار الاحاد

عدد طرق اختيار العشرات

عدد طرق اختيار المئات

عدد طرق اختيار الالاف

ملاحظة :- اذا كان مسموح به – نأخذ عدد الارقام كلها في السؤال

اما اذا كان غير مسموح به - نأخذ عدد الارقام ناقص (1) في كل خطوة مع العلم نبدأ بعدد الاعداد .

مثال/ بكم طريقه يمكن تكوين عدد رمزه مكون من اربعه مراتب يمكن تكوينها من مجموعه الارقام {9, 8, 7, 6 , 4, 2, 1} عندما

١- التكرار مسموح ٢- التكرار غير مسوح

الحل /

١- مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد = 7

عدد طرق اختيار العشرات = 7

عدد طرق اختيار المئات =7

عدد طرق اختيار الالاف = 7

عدد الاعداد = 7x7x7x7= 2401 عدد

٢- التكرار غير مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد = 7

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار المئات = 5

عدد طرق اختيار الالاف = 4

عدد الاعداد = 7x6x5x4 = 840 عدد

ملاحظة : يجب ترتيب الاعداد تصاعدياً قبل الحل اذا كانت غير مرتبة .

مثال/ بكم طريقه يمكن تكوين عدد رمزه مكون من (3) مراتب يمكن تكوينها من هذه الارقام 5,4,3,6,7,8 اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه :

١- مسموح به ٢- غير مسوح به

الحل : يجب ترتيب الاعداد 3,4,5,6,7,8

١- مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد = 6

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار المئات =6

عدد الاعداد = 6x6x6 = 216 عدد

٢- غير مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد = 6

عدد طرق اختيار العشرات = 5

عدد طرق اختيار المئات = 4

عدد الاعداد =6x5x4 = 120 عدد

مثال/ بكم طريقه يمكن تكوين عدد رمزه مكون من (3) مراتب يمكن تكوينها من هذه الارقام 1,2,3,4,5,6,7اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه :

١- مسموح به ٢- غير مسوح به

الحل :

١- مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد =7

عدد طرق اختيار العشرات = 7

عدد طرق اختيار المئات =7

عدد الاعداد = 7x7x7 = 343 عدد

٢- غير مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد = 7

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار المئات =5

عدد الاعداد =7x6x5 = 210 عدد

رحلة التفوق في السادس

مثال/ اذا كان لدينا الاعداد 2,3,4,5,6 فكم عدد رمزه مكون من رقمين عندما يكون تكرار الرقم في العدد نفسه ١- مسموح به ٢- غير مسموح به

١- مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد = 5

عدد طرق اختيار العشرات = 5

عدد الاعداد = 5x5 = 25 عدد

٢- غير مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد = 5

عدد طرق اختيار العشرات = 4

عدد الاعداد =5x4 = 20 عدد

مثال / اذا كان لدينا الحروف أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، ز . كم كلمه يمكن تكوينها بحيث تكون مكونه من اربعة حروف على ان لا يسمح بتكرار الحرف الواحد في الكلمة الواحدة ؟

الحل / عدد طرق اختيار الحرف الاول = 6

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = 5

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = 4

عدد طرق اختيار الحرف الرابع = 3

عدد الكلمات = 6x5x4x3 = 360 كلمه

مثال / اذا كان لدينا الحروف أ ، ل ، ع ، ق ، ك ، ب . كم كلمه مكونه من اربعه احرف من هذه الحروف على انه لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

الحل / عدد طرق اختيار الحرف الاول = 6

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = 5

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = 4

عدد طرق اختيار الحرف الرابع = 3

عدد الكلمات = 6x5x4x3 = 360 كلمه .

ملاحظة : اذا كان المطلوب عدد فردي او زوجي يكون عدد الاختيارات الاعداد الفردية او الزوجية وحسب المطلوب مع العلم ان نبدأ بمرتبة الاحاد.

مثال / كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7 بحيث ان (أ)- يكون العدد زوجيا وتكرار الرقم في العدد نفسه غير مسموح به (ب)- يكون العدد فرديا وتكرار الرقم في العدد نفسه مسموح به

الحل / أ-

عدد طرق اختيار الاحاد = 3

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار المئات = 5

عدد الاعداد = 3x6x5= 90 عدد

ب-

عدد طرق اختيار الاحاد = 4

عدد طرق اختيار العشرات =7

عدد طرق اختيار المئات = 7

عدد الاعداد = 4x7x7 = 196 عدد

مثال/ اذا كان لدينا الاعداد 1, 2,3,4,5,6 . فكم عدد زوجي رمزه مكون من (3)ارقام يمكن تكوينه من هذه الاعداد اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه ١- مسموح به ٢- غير مسموح به

١- مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد = 3

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار المئات = 6

عدد الاعداد = 3x6x6 = 108 عدد

٢- غير مسموح به

عدد طرق اختيار الاحاد = 3

عدد طرق اختيار العشرات = 5

عدد طرق اختيار المئات = 4

عدد الاعداد =3x 5x4= 60 عدد

مثال2010 / كم عدد مكون من ثلاث ارقام مختلفة ومن مضاعفات العدد 5 يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7

عدد طرق اختيار الاحاد = 1

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار المئات = 5

عدد الاعداد = 1x6x5 = 30 عدد

مثال واجب / كم عدد يقبل القسمة على 2 وبدون باقي رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1 , 2, 3 ,4 ,5 ,6 ,7 اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه غير مسموح به

مثال / كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 3,4,5,6,7,8,9 . (أ) – على ان يكون العدد فرديا والتكرار غير مسموح به في العدد نفسه (ب)- على ان يكون العدد زوجيا والتكرار مسموح به في العدد نفسه

الحل / أ-

عدد طرق اختيار الاحاد = 4

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار المئات = 5

عدد الاعداد = 4x6x5= 120 عدد

ب-

عدد طرق اختيار الاحاد = 3

عدد طرق اختيار العشرات =7

عدد طرق اختيار المئات = 7

عدد الاعداد = 3x7x7 = 147 عدد

مثال/ 2015/١ كم عدد رمزه مكون من (3) ارقام يمكن تكوينه باستخدام الارقام 2,3,4,5,6,7,8,9 على ان يكون العدد فردياً والتكرار غير مسموح به

الحل :

عدد طرق اختيار الاحاد = 4

عدد طرق اختيار العشرات = 7

عدد طرق اختيار المئات = 6

عدد الاعداد = 4x7x6 = 168 عدد .

ملاحظه : اذا طلب في السؤال اكبر او اصغر فنبدأ بالمراتب الكبيرة .

ملاحظه : ١- في حاله الاكبر من – فيكون عدد الارقام اكبر من العدد المعطى +١ .

٢- في حالة الاقل من – فيكون عدد الارقام الاقل من العدد المعطى فقط .



مثال / بكم طريقه يمكن تكوين عدد رمزه مكون من (3) ارقام واقل من (500) يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7 اذا كان (أ) – يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه (ب) – لا يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه

الحل / أ-

عدد طرق اختيار المئات = 4

عدد طرق اختيار العشرات = 7

عدد طرق اختيار الاحاد = 7

عدد الاعداد = 4x7x7= 196 عدد

ب –

عدد طرق اختيار المئات = 4

عدد طرق اختيار العشرات =6

عدد طرق اختيار الاحاد = 5

عدد الاعداد = 4x6x5 = 120 عدد

مثال / كم عدد يكون رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 4 ,5,6,7,8 واكبر من 600 اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه مسموح به

الحل /

عدد طرق اختيار المئات = 3

عدد طرق اختيار العشرات = 5

عدد طرق اختيار الاحاد = 5

عدد الاعداد = 5x5x3 = 75 عدد

مثال / كم عدد يمكن تكوينه من 3 ارقام ولا يزيد عن 500 ارقامه ما خوذة من الارقام 2,3,5,6,7,8 علما ان التكرار غير مسموح به

الحل /

عدد طرق اختيار المئات = 2

عدد طرق اختيار العشرات = 5

عدد طرق اختيار الاحاد = 4

عدد الاعداد = 2x5x4 = 40

عدد الاعداد الكلي = 1 + 40 = 41 عدد

مثال / كم عدد رمزه مكون من اربع مراتب واكبر من 3000 يمكن تكوينه باستخدام الارقام 2,3,4,5,6,7 اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه مسموح به

الحل /

عدد طرق اختيار الالاف = 5

عدد طرق اختيار المئات = 6

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار الاحاد = 6

عدد الاعداد = 5x6x6x6 = 1080 عدد

مثال / كم عدداً رمزه مكون من 3 مراتب واقل من 600 يمكن تكوينه باستخدام الارقام 3,4,5,6,7,8,9 اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه غير مسموح به

الحل /

عدد طرق اختيار المئات = 3

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار الاحاد= 5

عدد الاعداد = 3x6x5 = 90 عدد

مثال / كم عدد يكون رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7 على ان يكون (أ) – العدد اكبر من (500) والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه (ب) – العدد اصغر من (400) والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه

الحل / أ-

عدد طرق اختيار المئات = 3

عدد طرق اختيار العشرات = 7

عدد طرق اختيار الاحاد = 7

عدد الاعداد = 3x7x7= 147 عدد

ب-

عدد طرق اختيار المئات = 3

عدد طرق اختيار العشرات =6

عدد طرق اختيار الاحاد = 5

عدد الاعداد = 3x6x5 = 90 عدد

مثال / اذا كان لدينا المجموعه $X=\{1,2,3,4,5,6,7,\}$ فكم عدد يمكن تكوينه اذا كان :

١- رمزه مكون من ثلاث ارقام بدون تكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيار الاحاد = 7

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار المئات = 5

عدد الاعداد = 7x6x5 = 210 عدد

٢- رمزه مكون من ثلاث ارقام ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيار الاحاد = 7

عدد طرق اختيار العشرات = 7

عدد طرق اختيار المئات = 7

عدد الاعداد= 7x7x7 = 343 عدد

٣- رمزه مكون من ثلاث ارقام اصغر من (400) بدون تكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيار المئات = 3

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار الاحاد = 5

عدد الاعداد= 3x6x5 = 90عدد

٤- رمزه مكون من ثلاث ارقام اكبر من (200) ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيار المئات = 6

عدد طرق اختيار العشرات = 7

عدد طرق اختيار الاحاد = 7

عدد الاعداد= 6x7x7 = 294 عدد

٥- رمزه مكون من ثلاث ارقام ويكون زوجيا بدون تكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيار الاحاد = 3

عدد طرق اختيار العشرات = 6

عدد طرق اختيار المئات = 5

عدد الاعداد = 3x6x5 = 90 عدد

٦- رمزه مكون من ثلاث ارقام ويكون فرديا ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيار الاحاد = 4

عدد طرق اختيار العشرات = 7

عدد طرق اختيار المئات = 7

عدد الاعداد = 4x7x7= 196 عدد

مثال / ما عدد الاعداد التي رمز كل منها مكون من ثلاثة ارقام مأخوذة من بين الارقام 3,4,5,6,7,8 (أ)- دون تكرار الرقم في العدد نفسه
(ب)- يمكن تكرار الرقم في العدد نفسه

الحل/ أ-

عدد طرق اختيار الاحاد = 6

عدد طرق اختيار العشرات = 5

عدد طرق اختيار المئات = 4

عدد الاعداد = 4x5x6= 120 عدد

ب-

عدد طرق اختيار الاحاد = 6

عدد طرق اختيار العشرات =6

عدد طرق اختيار المئات = 6

عدد الاعداد = 6x6x6 = 216 عدد

مثال واجب / كم عدد رمزه مكون من رقمين واصغر من 40 يمكن تكوينه باستخدام مجموعة الارقام {1 , 2, 3 , 4 , 5} اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه

١ – مسموح به ٢ – غير مسموح به

مثال / لدى فتاة (6) قمصان مختلفة الالوان و (7) تنورات مختلفة الالوان و (4) احذيه مختلفة فبكم زي مختلف مكون من قميص وتنوره وحذاء يمكن ان تظهر به الفتاة ؟

الحل /

عدد الازياء = 6x7x2= 168 زي

مثال / لدى احمد (5) سترات مختلفه و (6) بنطلونات مختلفة و (8) قمصان مختلفة فبكم زي مختلف يظهر به احمد مكون من سترة وبنطلون وقميص ؟

الحل /

عدد الازياء = 5x6x8= 240 زي

مثال / اعلن صاحب محل لبيع الدراجات الهوائيه انه يوجد لديه خمسه انواع من الدراجات ومن كل نوع توجد ثلاث احجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات في المحل ؟

الحل / عدد الدراجات = 5x3x6 = 90 دراجه

مثال / اعلن علي احد بائعي البدلات الرجالية ان لديه اكبر تشكيله من البدلات حيث يوجد في محله (5) موديلات ومن كل موديل يوجد (10) قياسات مختلفة ومن كل قياس يوجد (7) الوان مختلفة فما عدد البدلات الموجودة في المحل ؟

الحل / عدد البدلات = 5x10x7 = 350 بدله

س١ / كم عدد رمزه مكون من (4) مراتب واكبر من (5000) يمكن تكوينه باستخدام الارقام {4 ,5,6,7,8} والتكرار غير مسموح به.

س٢/ كم كلمة بمعنى او بدون معنى يمكن تكوينها من كلمة (سنكفيكهم) مكونة من اربع احرف على ان لا يسمح بتكرار الحرف الواحد بالكلمة الواحدة ؟

س٣/ كم عدد رمزه مكون من (3) مراتب واكبر من (600) يمكن تكوينه من الارقام 4 ,5,6,7,8 اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه ١) مسموح به ٢) غير مسموح به.

مضروب العدد !

رمزه L^n او $n!$: وبعني ضرب العدد تنازليا حتى الوصول الى الواحد حيث ان $n \in N$.

مثال / جد ما يأتي

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

$$5! - 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 3 \times 2 \times 1 = 120 - 6 = 114$$

ملاحظه :

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots\ldots \times 1$$

$$0! = 1$$

1!=1

مثال / اكتب بأبسط صوره $\frac{8!}{6!}$ او $\frac{L^8}{L^6}$

الحل /

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8\times7\times6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$$

** ايجاد قيمه n باستخدام مضروب العدد ! :

اولا :- اذا كان الطرف الايسر عبارة عن مضروب والطرف الثاني عدد فقط نحلل العدد الى عوامله ونأخذ العدد الاخير فقط .

مثال / جد قيمه n اذا علمت ان :

1) $n! = 720$

1	720
2	720
3	360
4	120
5	30
6	6

$n! = 6!$

$n = 6$

2) $n! = 5040$

1	5040
2	5040
3	2520
4	840
5	210
6	42
7	7

$n! = 7!$

$n = 7$

واجب : جد قيمة n اذا علمت ان

1) $n! = 120$

2) $(n+1)! = 24$

3) $(\mathrm{n}-1)! = 6$

4) $(n-3) = 24$

5) $3(n!) = 360$

ثانيا :- اذا كان الطرف الثاني عبارة عن كسر اعمل ما يأتي :

١- المضروب في البسط يختصر مع المقام
٢- حل المعادلة الناتجة تحصل على قيمة n

ملاحظة: قد تتغير طريقة السؤال الى حاصل ضرب طرفين في وسطين .

مثال / جد قيمة n اذا كان

$$1 - \frac{n!}{(n-2)!} = 6$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6$$

$$n(n-1) = 6$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 6$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n-3)(n+2) = 0.$$

اما $n - 3 = 0 \rightarrow n = 3$

او $n+2=0 \rightarrow n = -2$ يهمل

$$2 - \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$(n+1)n = 30 \quad \Rightarrow n^2 + n = 30$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 30 = 0$$

$(n-5)(n+6) = 0 \quad \Rightarrow$ اما $n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5$

او $n + 6 = 0 \Rightarrow \quad n = -6$ يهمل

واجب / جد قيمة *n* اذا علمت ان

$1)\ \frac{n!}{(n-2)!} = 20$, $2)\ \frac{n!}{(n-2)!} = 72$

$3)\ \frac{n!}{(n-2)!} = 42$, $4)\ \frac{(n+1)}{(n-1)!} = 72$

$5)\ \frac{(n+1)}{(n-1)!} = 56$, $6)\ \frac{(n+1)}{(n-1)!} = 20$

**** التباديل ***

رمزه p^{n}_{r} او *p(n ,r)* ويقرأ تباديل *n* مأخوذة *r* حيث ان $n \geq r$, $n, r \in N$ ويعني ضرب العدد *n* تنازليا بقدر *r* .

مثال / احسب قيمه كل مما يأتي:

$$p^{6}_{3} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$p^{8}_{5} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

$$p^{15}_{7} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 32432400$$

$$\frac{p(6,3)}{5!} = \frac{6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1} = 1$$

ملاحظه :

$1 - p^{n}_{0} = 1$

$2 - p^{n}_{1} = 1$

$3 - p^{n}_{n} = n!$

*** التوافيق ***

رمزه c_r^n , او $c\,(n,r)$ او $\binom{n}{r}$ ويقرا توافيق n مأخوذة r و $n \geq r, n, r \in N$

بحيث ان $c_r^n = \frac{p_r^n}{r!}$

ملاحظه :

$c_1^n = n$

$c_0^n = 1$

$c_n^n = 1$

$c_r^n = c_{n-r}^n$ تستخدم للاعداد الكبيرة فقط او اذا كان r اكبر من نصف n ,

مثال / احسب :

$$c_5^{13} = \frac{p_5^{13}}{5!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1287$$

$2 - c_0^{10} = 1$

3-$c_{20}^{20} = 1$

4-$c_{12}^{15} = c_3^{15} = \frac{15\times14\times13}{3\times2\times1} = 455$

$5 - c_{18}^{18} = 1$

$6 - c_5^{11} = \frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1} = 462$

$7 - \binom{7}{0} = 1$

$$8 - \frac{1}{210}\left[p_3^7 + p_4^7\right] = \frac{1}{210}[7 \times 6 \times 5 + 7 \times 6 \times 5 \times 4]$$

$$= \frac{1}{210}[210 + 840] = \frac{1}{210}[1050] = 5$$

مثال / اثبت ان $p^{3}_{0} - 2L^{0} = -1$

الحل : الطرف الايمن

$p^{3}_{0} - 2L^{0}$

1-2=-1

مثال / جد قيمه $\binom{68}{8} \div c^{68}_{60}$

الحل / $\binom{68}{8} \div \binom{68}{8} = 1$

** ايجاد قيمة n باستخدام التباديل والتوافيق :

١- حل التباديل والتوافيق او المضروب الموجودة في السؤال
٢- اختصر المتشابهات ان وجدت
٣- تخلص من الاقواس بالضرب ان وجدت
٤- تخص من الكسور ان وجدت
٥- حل المعادله الناتجة لتحصل على قيمه n والتي يجب ان تنتمي للأعداد الطبيعية .

مثال/ جد قيمه n اذا علمت ان :

$1 - p^{n}_{2} = 42$

$n(n-1) = 42 \implies n^2 - n = 42$

$n^2 - n - 42 = 0 \implies (n-7)(n+6) = 0$

اما $n - 7 = 0 \implies n = 7$

او $n + 6 = 0 \implies n = -6$ يهمل

$2 - p^{n}_{2} = 72$

$n(n-1) = 72 \implies n^2 - n = 72$

$n^2 - n - 72 = 0 \implies (n-9)(n+8) = 0$

اما $n - 9 = 0 \implies n = 9$

او $n + 8 = 0 \implies n = -8$ يهمل

$3-\ p_{5}^{n}=8p_{4}^{n}$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=8n(n-1)(n-2)(n-3)$

$n-4=8$

$\Rightarrow n=8+4\Rightarrow\ n=12$

....

$4-\ \binom{n}{4}=\binom{n}{6}$

$\binom{n}{4}=c_{n-6}^{\ n}$

$\Rightarrow n-6=4$

$\Rightarrow n=10$

او بطريقه اخرى $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$

$(n-4)(n-5)=30$

$n^2-9n+20=30\ \Rightarrow\ \ n^2-9n+20-30=0$

$n^2-9n-10=0\Rightarrow\ (n-10)(n+1)=0$

$n-10=0\Rightarrow n=10$

او $n+1=0\Rightarrow n=-1$ يهمل

....

$5-c_{20}^{\ n}=c_{35}^{\ n}$

باستخدام الملاحظه $c_{r}^{n}=c_{n-r}^{\ n}$

$c_{20}^{\ n}=c_{n-35}^{\ n}$

$\Rightarrow n-35=20$

$\Rightarrow n=55$

$6-2\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$

$2.\frac{n(n-1)}{2\times1}=\frac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}$

$1=\frac{n+1}{6}$

$\Rightarrow n+1=6$

$\Rightarrow n=6-1$

$\Rightarrow n=5$

....

7 - $p_2^n=90$

$\Rightarrow n(n-1)=90$

$\Rightarrow n^2-n-90=0$

$(n-10)(n+9)=0$

$\Rightarrow$ اما $n=10$

او $n=-9$ يهمل

....

8 - $p_2^n=110$

$\Rightarrow n(n-1)=110$

$\Rightarrow n^2-n-110=0$

$(n-11)(n+10)=0$

$\Rightarrow if\ n=11\ \ or\ n=-10$ يهمل

....

واجب : جد قيمة n اذا علمت ان

1) $\binom{n+1}{2} = 21$, 2) $\binom{n}{4} = 3p^{n}_{2}$

3) $p^{n}_{3} = 56(n-2)$, 4) $\frac{p^{n}_{2}}{3!} = 5$

5) $3C^{n}_{4} = 14C^{n}_{2}$, 6) $\frac{6p(n,3)}{c(4,2)} = 40C^{n-1}_{2}$

7) $2p^{n}_{2} = C^{n+1}_{3}$, 8) $p(n,5) = 6p(n,4)$

9) $p^{n+1}_{3} = 7p^{n}_{2}$

س / اذا كان $p(n,r) = 72$, $\binom{n}{r} = 36$ فما قيمة n, r ؟

** المسائل التي يؤدي حلها بالتباديل والتوافيق **

حل السؤال بالتباديل في الحالات الأتية فقط :

١- اذا وجد عدد التطبيقات المتباينة
٢- كم كلمه
٣- كم ترتيب او ترتيب معين (مراعات الترتيب)
٤- وجود مناصب او وظائف مثل مدير ، رئيس ، نائب ....
٥- اسئلة ترتيب صف في مستقيم او الجلوس على كرسي

** الباقي يؤدي حلها بالتوافيق .. مثل:

{ الاشكال الهندسية ، الاسئلة ، اكثر من مجموعة ،المجموعات الجزئية الثنائية والثلاثية ... }

الامثلة :

١- كم كلمة يمكن تكوينها من اربعة حروف مختلفة ما خوذة من الاحرف أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ؟

الحل / $p^{5}_{4} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ كلمة

---

٢ – كم كلمة مختلفة مكونه من ثلاثة حروف من بين حروف كلمة ذي قار ؟

الحل / { ذ ، ي ، ق ، أ ، ر }

$p^{5}_{3} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ كلمة

---

٣ – يجرى في احدى الصفوف انتخاباً على ثلاثة مراكز في احدى لجان الصف هي الرئيس ونائب الرئيس و امين سر ما عدد نتائج التي تسفر عنها الانتخابات اذا علم ان عدد الطلاب المشاركين في الانتخابات عشرة طلاب ؟

الحل / $p^{10}_{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ عدد النتائج

---

٤ – بكم طريقة يمكن ان يجلس خمسة طلاب في صف من ثمانية كراسي ؟

الحل / $p^{8}_{5} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ طريقة

---

٥ – بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث اشخاص من بين عشرة اشخاص لشغل ثلاثة وظائف معينه مختلفة ؟

الحل / $p^{10}_{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ طريقة

---

٦ – ما عدد طرق اختيار (5) اشخاص على (5) وظائف مختلفة بحيث لكل واحد منهم وظيفة واحدة ؟

الحل/ $p^{5}_{5} = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ طريقة

٧ – اذا كان عدد الاسئلة في الورقة الامتحانية (8) اسئلة والمطلوب الاجابة على (6) منها فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

الحل / $c^{8}_{6} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 4 \times 7 = 28$ طريقة

---

٨ – ما عدد طرق اختيار شخصين من بين ستة اشخاص دون مراعاة الترتيب ؟

الحل / $c^{6}_{2} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$ طريقة

---

٩ – ما عدد طرق اختيار لجنه ثلاثية من بين (10) اشخاص ؟

الحل / $c^{10}_{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 10 \times 3 \times 4 = 120$ طريقة

---

١٠ – ما عدد المجموعات الجزئية الثنائية التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها (6)؟

الحل/ عدد المجموعات $c^{6}_{2} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

---

١١ – ما عدد القطع المستقيمة التي يمكن ان تصل بين اي راس من رؤوس مضلع سداسي ؟

الحل / عدد القطع $c^{6}_{2} = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

---

١٢ – ما عدد طرق اختيار ثلاثة اشخاص من بين سبعة اشخاص ليسوا متمايزين ؟

الحل/ $c^{7}_{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$ طريقة

١٣ – كم قطعة مستقيم يمكن تحديدها بنقطتين من مجموعة فيها (6) نقاط ولا توجد ثلاث منها على استقامة واحدة ؟

الحل/ $c^6_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$ قطعة مستقيمة

ملاحظة: الاسئلة التي تحتوي على اكثر من مجموعة تحل بالتوافيق علما ان كلمة (و) تعني ضرب وكلمة (او) تعني جمع

١٤ – بكم طريقة يمكن اختيار لجنه مكونه من (5) طالبات و (7) طلاب من بين مجموعة مكونة من (8) طالبات و(10) طلاب ؟

الحل /

$$c^8_5 . c^{10}_7 = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1} . \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

56x120=6720 طريقة

---

١٥ – صندوق يحتوي على (6) كرات حمراء و (4) كرات بيضاء يراد سحب (5) كرات بشرط ان تكون (3) كرات حمراء فقط بكم طريقة يمكن اجراء السحب ؟

الحل/

$$c^6_3 . c^4_2 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times \frac{4\times3}{2\times1}$$

$6 \times 20 = 120$ طريقة

١٦– يراد تشكيل لجنه من ستة اعضاء من بين (5) طلاب و (8) مدرسين فبكم طريقة يمكن ان تكون اللجنة محتويه على مدرسين اثنين ؟

الحل /

$c^8_2 . c^5_4 = \frac{8\times7}{2\times1} \times \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1} =$ 28x5=140 طريقة

١٧ – اذا كان عدد اسئلة امتحان ما هو (10) اسئلة وكان المطلوب حل (7) اسئلة منها على ان تختار (4) اسئلة من الخمسة الاولى فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

الحل/

$$c^{5}_{4} \cdot c^{5}_{3} = \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1} \times \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$$

$5 \times 10 = 50$ طريقة

١٨– صندوق يحتوي على (4) كرات حمراء و (8) كرات بيضاء سحبت ثلاث كرات معا جد عدد طرق السحب

١ – اثنان حمراء و واحدة بيضاء ٢- على الاقل اثنان حمراء

الحل / ١-

$c^{4}_{2} \cdot c^{8}_{1} = \frac{4\times3}{2\times1} \times 8 = 6 \times 8 = 48$ طريقة

– ملاحظة : اذا وجد في السؤال على الاقل فانه يحوي على و / او.

ملاحظة : ١) كلمة على الاقل نبدأ بذلك الرقم ونزيده

٢) كلمة على الاكثر نبدأ بذلك الرقم ونقلله

على الاقل اثنان حمراء هذا يعني اما اثنان حمراء و واحدة بيضاء او ثلاثة حمراء

$$c^{4}_{2} \cdot c^{8}_{1} + c^{4}_{3}$$

$$= \frac{4\times3}{2\times1} \times 8 + \frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}$$

$= 6 \times 8 + 4 = 48 + 4 = 52$ طريقه

واجبات :-

س١/ صندوق يحتوي على 12 مصباح كهربائي بينهما 5 مصابيح عاطلة بكم طريقة يمكن سحب ثلاث مصابيح بشرط على ان يكون مصباحين على الاقل صالحين ؟

س٢/ كيس فيه 10 كرات حمراء و6 كرات بيضاء سحبت منه 4 كرات معاً دون ارجاع . ما عدد الطرق التي يكون فيها الكرات المسحوبة من نفس اللون ؟

س٣ / اذا كان عدد اسئلة مادة الرياضيات 7 اسئلة والمطلوب حل 5 اسئلة بشرط ان يكون ثلاث منها فردية الترقيم ؟

س٤/ كيس يحتوي على 6 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء يراد سحب 3 كرات بشرط ان تكون من نفس اللون. جد عدد طرق السحب؟

س٥ / بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من ثلاث اشخاص من بين 6 طلاب و5 طالبات وكالاتي :

١ – بدون شرط ٢ – ان تكون اللجنة من جنس واحد

٣ - ان تحتوي اللجنة على طالبين فقط

٤ – ان تحتوي اللجنة على طالب واحد على الاقل .

س٦ / بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من 3 موظفين وموظفتين من بين 10 موظفين و خمسة موظفات ؟

س ٧/ اذا كان عدد اسئلة امتحان ما هو (8) اسئلة وكان المطلوب حل (5) اسئلة منها على ان تختار (3) اسئلة من الاربعة الاولى فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

2016د١/ مجموعة من الطلاب مكونة من 10 طلاب و 8 طالبات يراد تشكيل لجنة مؤلفة من 7 اعضاء لإدارة الانشطة الطلابية ، بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة اذا تكونت من 4 طلاب و 3 طالبات ؟

2016د٢/ كم كلمة مكونه من ثلاث حروف مختلفة يمكن تكوينها من كلمة (ستنتصرون)

2016د٢/ اذا كان هنالك 7 خريجين يريدون ان يتوظفوا ولم يجدوا سوى 3 وظائف فبكم طريقة يمكن اشغال الوظائف

** مبرهنة ذات الحدين **

هي قانون لإيجاد ناتج قوى مجموع حدين اي مقدار مكون من مجموع حدين اذا رفع الى اي اس عدد صحيح موجب .

$$(x+y)^n = c^{n}_{0}x^n + c^{n}_{1}x^{n-1}y + c^{n}_{2}x^{n-2}y^2 + \cdots \ldots . + c^{n}_{n}y^n$$

*** الجزء الاول ... ***

اذا كانت صيغة السؤال جد مفكوك فتكون طريقة الحل باستخدام التوافيق وخواص الاسس .

١ – قيمة r تبدأ من الصفر وتتوقف عندما n=r

٢ – الحد الاول يأخذ اس القوس ثم يتناقص وينتهي بالاس صفر بينما الحد الثاني يبدأ من الصفر وينتهي بأس القوس

٣ – افتح التوافيق ثم استخدم خواص الاسس تحصل على الناتج النهائي

مثال / جد مفكوك كل من

1- $(x-y)^5 = c^{5}_{0}x^5 - c^{5}_{1}x^4y + c^{5}_{2}x^3y^2 - c^{5}_{3}x^2y^3 + c^{5}_{4}xy^4 - c^{5}_{5}y^5$

$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2 3 + 5xy^4 - y^5$

$2-(3a+b)^4 = c^{4}_{0}(3a)^4 + c^{4}_{1}(3a)^3b + c^{4}_{2}(3a)^2b^2 + c^{4}_{3}(3a)b^3 + c^{4}_{4}b^4$

$= 81a^4 + 108a^3b + 54a^2b^2 + 12ab^3 + b^4$

$3-(3a-b)^4 = c^{4}_{0}(3a)^4 - c^{4}_{1}(3a)^3b + c^{4}_{2}(3a)^2b^2 - c^{4}_{3}(3a)b^3 + c^{4}_{4}b^4$

$= 81a^4 - 108a^3b + 54a^2b^2 - 12ab^3 + b^4$

$4-(3x^2+2y)^3 = c^3_0(3x^2)^3 + c^3_1(3x^2)^2(2y) + c^3_2(3x^2)(2y)^2 + c^3_3(2y)^3$

$= 27x^6 + 54x^4y + 36x^2y^2 + 8y^3$

$5-\ (2x-\frac{1}{2x})^6$　　واجب

ملاحظة : اذا طلب في السؤال مفكوك عدد ولم يكتب على شكل حدين فيجب ان يكتب العدد على شكل فرق او مجموع مربعين .

مثال / باستخدام مبرهنة ذات الحدين جد قيمة

$1-(101)^3$

$= (100+1)^3$

$= c^3_0(100)^3 + c^3_1(100)^2(1) + c^3_2(100)(1)^2 + c^3_3(1)^3$

$= 1000000 + 3(10000) + \frac{3\times2}{2\times1}(100) + 1$

$= 1000000 + 30000 + 300 + 1$

$= 1030301$

$2-\ (99)^4$

$= (100-1)^4$

$= c^4_0(100)^4 - c^4_1(100)^3(1) + c^4_2(100)^2(1)^2 - c^4_3(100)(1)^3 + c^4_4(1)^4$

$= (100000000 - 4(1000000) + \frac{4\times3}{2\times1}(10000) - \frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}(100) + 1$

= 100000000 - 4000000+ 60000 -400 +1

= 95059601

** قانون الحد العام **

$$p_r = c^{\,n}_{\,r-1}\, x^{n-r+1} y^{r-1}$$

حيث ان x : الحد الاول من القوس

Y : الحد الثاني من القوس

n : اس القوس

r : رتبة الحد

يستخدم قانون الحد العام لإيجاد اي حد من حدود المفكوك

**** الجزء الثاني ...****

١ – اذا كانت صيغة السؤال جد الحد الثالث او الرابع او الخامس ....

٢ – اذا كانت صيغة السؤال جد الحد الاوسط او الاوسطين .....

خطوات الحل :

١- اكتب قانون الحد العام
٢- عوض القيم من السؤال في القانون
٣- افتح التوافيق واستخرج خواص الاسس تحصل على الناتج

مثال / اوجد الحد الخامس في مفكوك $(x-3y)^8$

الحل :

$$p_r = c^{\,n}_{\,r-1}\, x^{n-r+1} y^{r-1}$$

$$p_5 = c^{\,8}_{\,4} x^{8-5+1}(3y)^4 = c^{\,8}_{\,4} x^4 (81y^4)$$

$$p_5 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} x^4(81y^4) = 70\times 81x^4y^4 = 5670x^4y^4$$

مثال/ جد الحد الثالث في مفكوك $(x-3y^2)^7$

الحل:

$$p_r = c^{\,n}_{\,r-1}\, x^{n-r+1} y^{r-1}$$

$$p_3 = c^{\,7}_{\,2}\, x^{7-3+1}(-3y^2)^2 = c^{\,7}_{\,2}\, x^5 (9y^4)$$

$$p_3 = \frac{7\times 6}{2\times 1} x^5 (9y^4) = 21 \times 9\mathrm{x}^5\mathrm{y}^4 = 189\mathrm{x}^5\mathrm{y}^4$$

مثال / جد الحد الاوسط في مفكوك $(\frac{x}{2}-3)^8$

الحل : ملاحظة: اذا كان الاس عدد زوجي فان الحد الاوسط $r = \frac{n}{2} + 1$

اما اذا كان فردي $r = \frac{n+1}{2}$.

$$r = \frac{n}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 5$$

$$p_r = c^{\,n}_{\,r-1}\, x^{n-r+1} y^{r-1}$$

$$p_5 = c^{\,8}_{\,4} \left(\frac{x}{2}\right)^{8-5+1} (-3)^4$$

$$p_5 = c^{\,8}_{\,4} \left(\frac{x}{2}\right)^{4} (81)$$

$$\mathrm{p}_5 = \frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1} \times \frac{\mathrm{x}^4}{16} \times 81 = \frac{2835}{8}\mathrm{x}^4$$

مثال/ جد الحد الاوسط في مفكوك $(a-\frac{2}{a})^{12}$

الحل :

$$r=\frac{n}{2}+1=\frac{12}{2}+1=7$$

$$p_r=c_{r-1}^{\,n}\,x^{n-r+1}y^{r-1}$$

$$p_7=c_6^{12}\,a^{12-7+1}\left(-\frac{2}{a}\right)^6$$

$$p_7=c_6^{12}\,a^6\,\frac{64}{a^6}$$

$$p_7=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2\times1}\times64=59136$$

مثال/ جد الحدين الاوسطين في مفكوك $(\frac{3a}{2}-\frac{2}{3a})^7$

الحل:

$$r_1=\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4\ ,\ r_2=4+1=5$$

$$p_r=c_{r-1}^{\,n}\,x^{n-r+1}y^{r-1}$$

عندما $r_1=4$

$$p_4=c_3^{7}\left(\frac{3a}{2}\right)^{7-4+1}\left(\frac{-2}{3a}\right)^3$$

$$p_4=c_3^{7}\left(\frac{3a}{2}\right)^4\left(\frac{-8}{27a^3}\right)$$

$$p_4=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\frac{81a^4}{16}\times\frac{-8}{27a^3}=\frac{-105a}{2}$$

عندما $r_2=5$

$$p_5=c_4^{7}\left(\frac{3a}{2}\right)^{7-5+1}\left(\frac{-2}{3a}\right)^4$$

$$p_5=c_4^{7}\left(\frac{3a}{2}\right)^3\left(\frac{16}{81a^4}\right)$$

$$p_5=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\times\frac{27a^3}{8}\times\frac{16}{81a^4}=\frac{70}{3a}$$

مثال/ جد الحدين الاوسطين في مفكوك $(2a-1)^7$

الحل /

$$r_1=\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4\ ,\quad r_2=5$$

$$p_r=c^{\,n}_{\,r-1}\,x^{n-r+1}y^{r-1}$$

عندما $r_1=4$

$$p_4=c^{\,7}_{\,3}(2a)^{7-4+1}(-1)^3$$

$$p_4=c^{\,7}_{\,3}(2a)^4(-1)$$

$$p_4=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times(16a^4)(-1)=-56a^4$$

عندما $r_2=5$

$$p_5=c^{\,7}_{\,4}(2a)^{7-5+1}(-1)^4$$

$$p_5=c^{\,7}_{\,4}(2a)^3(1)$$

$$p_5=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\times8a^3=280a^3$$

مثال / جد الحد السادس في مفكوك $(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3})^8$ واجب ..

**** الجزء الثالث ...***

اذا كان السؤال يحوي على متغير مثل x ,a :

١- نفرض رتبة الحد = r
٢- اكتب قانون الحد العام
٣- عوض القيم المعلومة في السؤال
٤- باستخدام قوانين الاسس بسط الحل بحيث يكون بدلالة عدد واحد ومتغير واحد
٥- اجعل اسس المتغير الموجودة في الجواب تساوي اسس المتغير الموجودة في السؤال ومنه تحصل على قيمة r
٦- عوض r في اخر خطوة من الحل ثم افتح التوافيق تحصل على الناتج

مثال / جد الحد الذي يحوي a^8 في مفكوك $(3+a^2)^8$ ثم جد معامله

الحل /

$$p_r = c^{\,n}_{\,r-1}\, x^{n-r+1} y^{r-1}$$

$$= c^{\,8}_{\,r-1}\,(3)^{8-r+1}(a^2)^{r-1}$$

$$= c^{\,8}_{\,r-1}\; 3^{9-r}\, a^{2r-2}$$

$$\therefore a^8 = a^{2r-2}$$

$$\Rightarrow 8 = 2r - 2$$

$$\Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$$

$$p_5 = c^{\,8}_{\,4}\, 3^4 a^8$$

$$= \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} \times 81 \times a^8 = 5670a^8$$

المعامل= *5670*

مثال/ جد الحد الذي يحوي على x^4 في مفكوك $(1+x^2)^6$

الحل /

$$p_r = c^{\,n}_{\,r-1}\, x^{n-r+1}\; y^{r-1}$$

$$= c^{\,6}_{\,r-1}\,(1)^{6-r+1}\,(x^2)^{r-1}$$

$$= c^{\,6}_{\,r-1}\,(1)^{7-r}\; x^{2r-2}$$

$$x^4 = x^{2r-2}$$

$$\Rightarrow 4 = 2r - 2$$

$$\Rightarrow 2r = 6 \Rightarrow r = 3$$

$$p_3 = c^{\,6}_{\,2}\,(1)^4\, x^4 = \frac{6\times5}{2\times1}x^4 = 15x^4$$

مثال/ جد الحد الخالي من x في مفكوك $(x^2 + \frac{2}{x^3})^{10}$

الحل/ الحد الخالي من x يعني انه يحتوي على x^0

$$p_r = c^{\,n}_{\,r-1}\, x^{n-r+1} y^{r-1}$$

$$= c^{\,10}_{\,r-1}\, (x^2)^{10-r+1} \left(\frac{2}{x^3}\right)^{r-1}$$

$$= c^{\,10}_{\,r-1}\, (x^2)^{11-r}\ (2x^{-3})^{r-1}$$

$$= c^{\,10}_{\,r-1}\ x^{22-2r}\ (2)^{r-1}\ (x)^{-3r+3}$$

$$= c^{\,10}_{\,r-1}\, x^{25-5r}\ (2)^{r-1}$$

$$\Longrightarrow x^{25-5r} = x^0$$

$$\Longrightarrow 25 - 5r = 0$$

$$\Longrightarrow 5r = 25 \Longrightarrow r = 5$$

$$p_5 = c^{\,10}_{\,4}\, (x)^0\, (2)^4$$

$$= \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} \times 16 = 3360$$

مثال/ جد الحد الخالي من x في مفكوك $(x^2-\frac{1}{x})^{15}$

الحل/

$$p_r = c^{\,n}_{\,r-1}\, x^{n-r+1} y^{r-1}$$

$$= c^{\,15}_{\,r-1}\,(x^2)^{15-r+1}\left(-\frac{1}{x}\right)^{r-1}$$

$$= c^{\,15}_{\,r-1}\,(x^2)^{16-r}(-1\,x^{-1})^{r-1}$$

$$= c^{\,15}_{\,r-1}\,(x)^{32-2r}\quad(x)^{-r+1}\quad(-1)^{r-1}$$

$$= c^{\,15}_{\,r-1}\,x^{33-3r}\;(-1)^{r-1}$$

$$\Rightarrow x^{33-3r} = x^0$$

$$\Rightarrow 33-3r = 0$$

$$\Rightarrow 3r = 33 \Rightarrow r = 11$$

$$p_{11} = c^{15}_{10}\,x^0(-1)^{10} = 3003$$

مثال / جد معامل x^2 في مفكوك $(x^3+\frac{2}{x^2})^9$

2016د١ / جد الحد الخالي من x في مفكوك $(x+\frac{2}{x^2})^6$

مثال / جد الحد الذي يحوي a^3 في مفكوك $(2a-1)^7$

**** الجزء الرابع .. ****

حاصل جمع او طرح قوسين مرفوعين الى اس .

١- يجب ان يكون العدد في القوسين متساويين في المقدار ومختلفين بالإشارة
٢- اذا كانت الاشارة بين القوسين (-) الناتج هو ضعف مجموع الحدود الزوجية واذا كانت الاشارة بين القوسين (+) الناتج هو ضعف مجموع الحدود الفردية
٣- على كل حد طبق قانون الحد العام تحصل على الناتج

مثال/ جد قيمة $(102)^4-(98)^4$

مثال/ جد قيمة $(2+\sqrt{3})^7+(2-\sqrt{3})^7$

الفصل الثاني ... الغاية والاستمرارية

الغاية رمزها $\lim_{x\to a} f(x)$

اولا : غاية الثابت = العدد الثابت نفسه

العدد الثابت : هو العدد الخالي من المتغير x

مثال/ جد ناتج

$$\lim_{x\to 1} 7 = 7$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to -1} 9 = 9$$

ثانيا : غاية الدوال الخطية (كثيرة الحدود)

نعوض العدد المعطى اسفل الغاية بدل x ونستخرج الناتج حيث ان عند التعويض لا يكتب رمز الغاية .

مثال/ جد ناتج

$$\lim_{x\to 1} x + 4 = 1 + 4 = 5$$

$$\lim_{x\to -5} x - 3 = -5 - 3 = -8$$

$$\lim_{x\to 2} 4x = 4(2) = 8$$

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 2x = (1)^2 + 2(1) = 3$$

$$\lim_{x\to -3} x^3 + 2x = (-3)^3 + 2(-3) = -33$$

$$\lim_{x\to -1} x^3 + 2x + 3 = (-1)^3 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

ثالثاً : غاية الدالة الكسرية .

نعوض العدد المعطى اسفل الغاية في المقام فاذا كان الناتج لا يساوي صفر فنستخرج الناتج بالتعويض المباشر . اما اذا كان الناتج يساوي صفر حلل حسب طرق التحليل واختصر المتشابهات في البسط والمقام ثم عوض في الدالة الناتجة .

مثال/

$$1-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

$$2-\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x+2}=\frac{(3)^2-2}{3+2}=\frac{9-2}{5}=\frac{7}{5}$$

$$3-\lim_{x\to 0}\frac{x^2+5}{2x+1}=\frac{0+5}{0+1}=5$$

$$4-\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}x+3=3+3=6$$

$$5-\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2+2}=\frac{12}{4}=3$$

$$6-\lim_{x\to 0}\frac{x^4+1}{x+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$$

$$7 - \lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-x-6}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{-2}{-2-3} = \frac{2}{5}$$

$$8 - \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$= 2(2) = 4$$

$$9 - \lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2+2x-15}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+5)}$$

$$= \frac{3^2+9+9}{3+5} = \frac{27}{8}$$

$$10 - \lim_{x\to 1} \frac{x^3+7x^2-8x}{3x^2-3}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x^2+7x-8)}{3(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(x+8)}{3(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{9}{6}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$11-\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$=\frac{-3}{8}$$

واجب :-

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$, 2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x-2}$

3) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}$, 4) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2}{2x-2}$

5) $\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+16}{3x^2-12}$, 6) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

7) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$, 8) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x-2}$

9) $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$, 10) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}$

ملاحظة : اذا كانت الدالة الكسرية حاوية على جذر ولإيجاد الغاية لها نضرب البسط والمقام في مرافق المقدار الحاوي على الجذر .

العامل المرافق : هو نفس المقدار مكون من حدين بعكس اشارة الموجودة .

$$12-\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x^2-2)(x+\sqrt{2})}{x^2-2}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{2}} x+\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$13-\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)$$

$$=2(2)=4$$

$$14-\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x}-3}\cdot\frac{\sqrt{3x}+3}{\sqrt{3x}+3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x}+3)}{3x-9}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x}+3)}{3(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x+3)(\sqrt{3x}+3)}{3}=\frac{36}{3}=12$$

$$15-\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$$16-\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{\sqrt{x+10}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+10}+3}{\sqrt{x+10}+3}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{x+10-9}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}x\left(\sqrt{x+10}+3\right)$$

$$=-1(3+3)=-6$$

واجب :

1) $\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$, 2) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{3x}-1}$, 4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$,6) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$,2016

رابعاً : غاية الدالة المتكونة من جزئيين .

١ – اذا طلب الغاية عند عدد يساوي الحد الفاصل جد ما يأتي:

أ – الغاية من اليمين وارمز لها $L1$ حيث ان الجزء اليمين هو الجزء الحاوي على >

ب – الغاية من اليسار وارمز لها $L2$ حيث ان الجزء اليسار هو الجزء الحاوي على <

ج – اذا كان $L1 = L2$ فنقول للدالة غاية .

٢ – اذا طلب الغاية عند عدد اكبر من الحد الفاصل فجد الغاية من اليمين فقط

٣ – اذا طلب الغاية عند عدد اقل من الحد الفاصل فجد الغاية من اليسار فقط

مثال / لتكن $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \le 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}$ هل للدالة $f(x)$ غاية عند 2 ؟ ثم جد غاية الدالة $f(x)$ عند (-1) ، عند 4 .

الحل/

$\therefore \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4 \quad L1$

$\lim_{x\to 2} 1-x = 1-2 = -1 \quad L2$

$\therefore$ لا توجد للدالة غاية $L1 \ne L2$

$2 - \lim_{x\to -1} 1-x = 1-(-1) = 1+1 = 2$

$3 - \lim_{x\to 4} x+2 = 4+2 = 6$

مثال/ لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ هل للدالة غاية f(x) عند 1 ؟

الحل/

$\lim_{x\to1} x^2+1 = (1)^2+1 = 2 \quad L1$

$\lim_{x\to1} 2x = 2(1) = 2 \quad L2$

$L1 = L2$

للدالة غاية عند 1

مثال / لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & x > 2 \\ 2-2x & x \leq 2 \end{cases}$ ١- هل للدالة غاية عند 2 ؟ ٢- جد $\lim_{x\to1} f(x)$

الحل/

$1 - \lim_{x\to2} x^2-3 = (2)^2-3 = 4-3 = 1 \quad L1$

$\lim_{x\to2} 2-2x = 2-2(2) = 2-4 = -2 \quad L2$

$\therefore$ لا توجد للدالة غاية $L1 \neq L2$

$2 - \lim_{x\to1} 2-2x = 2-2(1) = 2-2 = 0$

مثال ؟ لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$ هل للدالة غاية عند 2 ؟ بين ذلك

الحل /

$\lim_{x\to2} x^2+1 = 4+1 = 5 \quad L1$

$\lim_{x\to2} 2-x = 2-2 = 0 \quad L2$

$L1 \neq L2$

لا توجد للدالة غاية عند 2

واجب :

س١/ لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ,x \le 3 \\ 4x-2 & ,x > 3 \end{cases}$ ابحث وجود

1) $\lim_{x\to 4} f(x)$ 2) $\lim_{x\to -2} f(x)$ 3) $\lim_{x\to 3} f(x)$

س٢/ لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ,x \ge 2 \\ 2-x & ,x < 2 \end{cases}$ هل للدالة غاية عند x=2.

س٣/ اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & ,x < 2 \\ 13 & ,x \ge 2 \end{cases}$ جد ان امكن $\lim_{x\to 2} f(x)$.

استمرارية الدالة عند نقطة :-

لكي تكون الدالة f(x) مستمرة عند f=a يجب ان تحقق الشروط الاتية :

١ – f(a) موجودة وحقيقية

٢ - $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة وحقيقية

٣ - $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

وعند عم تحقق اي شرط من تلك الشروط نقول الدالة غير مستمرة .

مثال / ابحث استمرارية الدالة $f(x) = x^3 + x$ عند x=1 .

الحل /

$1 - f(1) = (1)^3 + 1 = 2$

$2 - \lim_{x\to 1} x^3 + 1 = 1 + 1 = 2$

$3 - f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

الدالة مستمرة عند x=1

مثال/ ابحث استمرارية الدالة حيث $f(x)=\frac{x}{x+1}$ عند x=3 ؟

الحل:

$1-f(3)=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$

$2-\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+1}=\frac{3}{4}$

$3-f(3)=\lim_{x\to 3}f(x)$

الدالة مستمرة عند x=3

مثال/ لتكن $f(x)=\frac{x+3}{x^2+1}$ ابحث استمرارية الدالة عند x=1 ؟

الحل/

$1-f(1)=\frac{1+3}{1^2+1}=\frac{4}{2}=2$

$2-\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x^2+1}=\frac{1+3}{1+1}=\frac{4}{2}=2$

$3-f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$

الدالة مستمرة عند x=1

مثال/ لتكن $f(x)=x^3+x^2+3$ ابحث استمرارية الدالة عند x=3 ؟

الحل/

$1-f(3)=3^3+3^2+3=27+9+3=39$

$2-\lim_{x\to 3}x^3+x^2+3=3^3+3^2+3=39$

$3-f(3)=\lim_{x\to 3}f(x)$

الدالة مستمرة عند x=3

مثال/ لتكن $f(x) = 3x + 2$ هل f مستمرة عند x=a ؟ بين ذلك .

الحل /

$$1 - f(a) = 3a + 2$$

$$2 - \lim_{x \to a} 3x + 2 = 3a + 2$$

$$3 - f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

الدالة مستمرة عند x=a

مثال/ لتكن $f(x) = x^3$ ابحث استمرارية الدالة في مجالها .

الحل / اوسع مجال للدالة هو R

نفرض $a \epsilon R$

$$1 - f(a) = a^3$$

$$2 - \lim_{x \to a} x^3 = a^3$$

$$3 - f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

الدالة مستمرة في مجالها

مثال/ لتكن $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ اثبت f مستمرة في مجالها .(واجب)

ملاحظة : في الدالة المتكونة من جزئيين لكي تحقق شرط الاستمرارية (1) نعوض العدد في الجزء الحاوي على يساوي .

مثال/ لتكن $f(x)=\begin{cases}2x+3 & x<0\\ x^2+1 & x\geq 0\end{cases}$ هل f مستمرة عند x=0 ؟

الحل /

$1-f(x)=x^2+1$

$f(0)=0^2+1=1$

$2-\lim_{x\to0}x^2+1=0+1=1 \quad L1$

$\lim_{x\to0}2x+3=2(0)+3=3 \quad L2$

$L1\neq L2$

لا توجد للدالة غاية عند x=0

F غير مستمرة عند x=0

مثال/ لتكن $f(x)=\begin{cases}2-x & x<-1\\ 2x^2+1 & x\geq -1\end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند x=-1 ؟

الحل/

$1-f(x)=2x^2+1$

$f(-1)=2(-1)^2+1=2+1=3$

$2-\lim_{x\to-1}2x^2+1=2(-1)^2+1=3 \quad L1$

$\lim_{x\to-1}2-x=2-(-1)=2+1=3 \quad L2$

$L1=L2$

للدالة غاية عند x=-1

$3-f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)$

الدالة مستمرة عند x=-1

مثال/ لتكن $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq -1 \\ x^2 & x < -1 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند x=-1 ؟

الحل /

$1 - f(x) = 3x + 1$

$f(-1) = 3(-1) + 1 = -3 + 1 = -2$

$2 - \lim_{x\to -1} 3x + 1 = 3(-1) + 1 = -2 \quad L1$

$\lim_{x\to -1} x^2 = (-1)^2 = 1 \quad L2$

$L1 \neq L2$

لا توجد للدالة غاية

الدالة غير مستمرة عند x=-1

مثال/ لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq -1 \\ 3x+1 & x < -1 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند x=-1 ؟

الحل/

$1 - f(x) = x^2 - 2$

$f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$

$2 - \lim_{x\to -1} x^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \quad L1$

$\lim_{x\to -1} 3x + 1 = 3(-1) + 1 = -3 + 1 = -2 \quad L2$

$L1 \neq L2$

لا توجد للدالة غاية

الدالة غير مستمرة عند x=-1

مثال/ لتكن $f(x)=\begin{cases}1-2x & x\le 2\\ 1-x^2 & x>2\end{cases}$ اثبت الدالة مستمرة عند **x=2** ؟

الحل /

$1-f(x)=1-2x$

$f(2)=1-2(2)=1-4=-3$

$2-\lim_{x\to 2}1-x^2=1-2^2=-3 \quad L1$

$\lim_{x\to 2}1-2x=1-4=-3 \quad L2$

$L1=L2$

توجد للدالة غاية عند x=2

$3-f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)$

الدالة مستمرة عند x=2

مثال / لتكن $f(x)=|x-2|$ ابحث استمرارية الدالة عند **x=2** ؟

الحل/ يجب التخلص من الدالة المطلقة وذلك بتحويل الدالة الى الدالة المتكونة من جزئيين .

$f(x)=\begin{cases}x-2 & x\ge 2\\ -x+2 & x<2\end{cases}$

$1-f(x)=x-2$

$f(2)=2-2=0$

$2-\lim_{x\to 2}x-2=2-2=0 \quad L1$

$\lim_{x\to 2}-x+2=-2+2=0 \quad L2$

$L1=L2$

توجد للدالة غاية

$3-f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)$

الدالة مستمرة عند x=2

س ٢٠١٥ /دور ٣: لتكن $F: R \to R$ حيث ان $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \le 3 \\ 4x - 2 & , x > 3 \end{cases}$

١ – *ابحث استمرارية الدالة عند* x =3

٢ – *جد الغاية عند* x=-2

س2016 د١ / : لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x > 3 \\ 5 + x & , x \le 3 \end{cases}$

١ – ابحث استمرارية الدالة عند *x =3*

٢ – جد الغاية الدالة عند *x=2*

خارج2016 د١ / : لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x \le -1 \\ 4x + 8 & , x > -1 \end{cases}$ ناقش استمرارية الدالة عند *x=-1*

2016 د٢ / : لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 10 & , x \ge 3 \\ x + 5 & , x < 3 \end{cases}$ اثبت ان الدالة مستمرة عندما *x=3*

ايجاد الثوابت باستخدام الغاية والاستمرارية :

اولا :- اذا كان المطلوب ثابت واحد إعمل ما يأتي :

١ – جد الغاية بواسطة التعويض المباشر

٢ – حل هذه المعادلة تحصل على الثابت .

مثال / اذا كانت $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-1}{x+2} = 2a + 3$ جد قيمة *a* .

Sol :- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-1}{x+2} = 2a + 3$

$\frac{1^2+3(1)-1}{1+2} = 2a + 3$

$\frac{3}{3} = 2a + 3$

$1 = 2a + 3$

$2a = 1 - 3$

$2a = -2 \to a = -1.$

مثال/ اذا كانت $\lim_{x\to4}\frac{x^2-2x+6}{x+3} = 3a - 4$ جد قيمة a .

$$Sol :- \quad \lim_{x\to4}\frac{x^2-2x+6}{x+3} = 3a - 4$$

$$\frac{4^2-2(2)+6}{4+3} = 3a - 4$$

$$\frac{14}{7} = 3a - 4$$

$$2 = 3a - 4$$

$$3a = 2 + 4$$

$$3a = 6.$$

$$\Longrightarrow a = 2$$

مثال / اذا كانت $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = 8$ جد قيمة a .

الحل /

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = 8$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = 8$$

$$\lim_{x\to a} x + a = 8$$

$$a + a = 8$$

$$2a = 8a = 4$$

س 2010/ د١ : لتكن $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+8x-20} = 2a + 3$ جد قيمة a.

س 2010/ د٢ : لتكن $f(x) = ax^2 + 5$ وكانت $\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = 7$ جد قيمة a.

س 2015/ د١ : لتكن $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-8x+15} = -3a + 11$ جد قيمة a.

س 2015/ د٢ :لتكن $\lim_{x\to n}\frac{x^2-n^2}{x-n} = 10$ جد قيمة n .

ملاحظة :- في الدالة المكونة من جزئيين اذا كان المطلوب ثابت وان الغاية عند الحد الفاصل موجودة او مستمرة نجعل الغاية من اليمين تساوي الغاية من اليسار .

مثال / لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\le 1 \\ 2x+a & x>1 \end{cases}$ **وان** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **موجودة جد قيمة** a **.**

الحل/ بما ان $\lim_{x\to 1} f(x)$ **موجودة**

الغاية من اليسار = الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to 1} 2x+a=\lim_{x\to 1} x^2+2$$

$$2(1)+a=1^2+2$$

$$a=3-2$$

$$\Rightarrow a=1$$

مثال / لتكن $f(x)=\begin{cases} a+2x & x\le -1 \\ 3-x^2 & x>-1 \end{cases}$ **وكانت** $\lim_{x\to -1} f(x)$ **موجودة جد قيمة** a **.**

الحل / بما ان $\lim_{x\to -1} f(x)$ **موجودة**

الغاية من اليسار = الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to -1} 3-x^2=\lim_{x\to -1} a+2x$$

$$3-(-1)^2=a+2(-1)$$

$$3-1=a-2$$

$$\Rightarrow 2=a-2$$

$$\Rightarrow a=2+2$$

a =4 .

مثال/ لتكن $f(x)=\begin{cases} ax+3 & x\geq 1 \\ 3x^2+1 & x<1 \end{cases}$ جد قيمة a اذا كانت f مستمرة عند $x=1$.

الحل / بما ان f مستمرة

$\lim_{x\to1} f(x)$ موجودة

الغاية من اليسار = الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to1} ax+3=\lim_{x\to1} 3x^2+1$$

$$a(1)+3=3(1)^2+1$$

$$a+3=4$$

$$\Rightarrow a=4-3$$

$$\Rightarrow a=1$$

2016 خارج د١ / لتكن $f(x)=\begin{cases} a+2x & x\leq 2 \\ 3-x^2 & x>2 \end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to2} f(x)$ موجودة جد قيمة a .

ثانيا / اذا كان المطلوب ثابتين اعمل ما يأتي :

١ – جد الغاية بالتعويض المباشر ١

٢ – جد الغاية الثانية او النقطة في الدالة مباشرتاً ٢

٣ – حل المعادلتين انيا تحصل على احد الثوابت

٤ – جد الثابت الاخر بواسطة ١ او ٢ بالتعويض .

رحلة التفوق في السادس

عطاءٌ بلا حدود

A .M. Z

مثال / لتكن $f(x)=\begin{cases}x^2+a & x>1\\ b-2x & x\le 1\end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to1} f(x)$ موجودة وان $\lim_{x\to-1} f(x)=5$ جد قيمة a, b الحقيقيتين .

الحل/ بما ان $\lim_{x\to1} f(x)$ موجودة

الغاية من اليسار = الغاية من اليمين

$\lim_{x\to1} x^2+a=\lim_{x\to1} b-2x$

$1^2+a=b-2(1)$

$1+a=b-2 \ldots\ldots.(1$

$\lim_{x\to-1} f(x)=5$

$\lim_{x\to-1} b-2x=5$

$b-2(-1)=5$

$\Rightarrow b=5-2$

$\Rightarrow b=3$

نعوض قيمة b في معادلة رقم 1

$1+a=3-2$

$\Rightarrow 1+a=1$

$\Rightarrow a=1-1=0$

مثال/ اذا كانت $f(x) = ax^2 + bx$ وكانت $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to -2} f(x) = 8$ جد قيمتي a ,b الحقيقيتين.

الحل /

$\lim_{x\to 1} f(x) = 5$

$\lim_{x\to 1} ax^2 + bx = 5$

$a(1)^2 + b(1) = 5$

$\Rightarrow a + b = 5 \ldots\ldots 1$

$\lim_{x\to -2} f(x) = 8$

$\lim_{x\to -2} ax^2 + bx = 8$

$a(-2)^2 + b(-2) = 8$

$4a - 2b = 8 \qquad \div 2$

$2a - b = 4 \ldots\ldots\ldots 2$

$a + b = 5$

$2a - b = 4$

بالجمع ———————

$3a = 9$

$\Rightarrow a = 3$

نعوض قيمة a في معادلة رقم 1

$3 + b = 5$

$b = 5 - 3$

$b = 2$

2016 د١/ مثال/ اذا كانت $f(x) = ax^2 + bx + 3$ وكانت $\lim_{x\to 1} f(x) = 8$ ، $\lim_{x\to -1} f(x) = 4$ جد قيمتي a ,b الحقيقيتين.

مثال / لتكن $f(x)=\begin{cases}3x+a & x\geq 3\\ x^2-b & x<3\end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to 3} f(x)$ موجودة وان $f(\sqrt{2})=5$ جد قيمة a , b الحقيقيتين.

الحل / بما ان $\lim_{x\to 3} f(x)$ موجودة

الغاية من اليسار = الغاية من اليمين

$\lim_{x\to 3} 3x+a=\lim_{x\to 3} x^2-b$

$3(3)+a=3^2-b$

$9+a=9-b \ldots\ldots(1$

$f(\sqrt{2})=5$

$(\sqrt{2})^2-b=5$

$\Rightarrow b=2-5=-3$

نعوض قيمة b في 1

$9+a=9+3$

$\Rightarrow a=3$

س وزاري / ليكن $f(x)=a^2x^2-ax+3$ وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)=9$ جد قيمة a

2005 د ١ / اذا كانت $f(x)=ax^2+b$ وكانت $\lim_{x\to 2} f(x)=10$ والنقطة $(-1,1)$ تنتمي لمنحني الدالة جد قيمة a , b الحقيقيتين .

2006 / لتكن $f(x)=\begin{cases}x-b & x<2\\ ax^2-6 & x\geq 2\end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to 2} f(x)=-2$ جد قيمة a , b الحقيقيتين.

2011 تمهيدي/ لتكن $f(x)=\begin{cases}ax^3-2 & x\geq 2\\ 3x-b & x<2\end{cases}$ وكانت $\lim_{x\to 2} f(x)=6$ جد قيمة a , b الحقيقيتين.

س / لتكن $f(x)=\begin{cases}ax^3-2 & x\geq 2\\ 3x-b & x<2\end{cases}$ وكانت f مستمرة عند $x=2$ وان $f(3)=25$ جد قيمة a , b الحقيقيتين.

مثال/ لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x+b & x \le -1 \\ x^2+a & x > -1 \end{cases}$ **جد قيمتي** a , b **الحقيقيتين اذا كانت** f **مستمرة عند** $x=-1$ **وان** $f(2) = 7$.

الحل / بما ان f **مستمرة**

$\therefore \lim_{x\to-1} f(x)$ **موجودة**

الغاية من اليسار = الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to-1} x^2 + a = \lim_{x\to-1} 2x + b$$

$$(-1)^2 + a = 2(-1) + b$$

$$1 + a = -2 + b \dots\dots(1$$

$$f(2) = 7$$

$$2^2 + a = 7$$

$$\Rightarrow a = 7 - 4$$

$$\Rightarrow a = 3$$

نعوض قيمة a **في معادلة** 1

$$1 + 3 = -2 + b$$

$$4 = -2 + b$$

$$\Rightarrow b = 4 + 2$$

$$\Rightarrow b = 6$$

الفصل الثالث - التفاضل

المشتقة رمزها $f'(x)$ او y' او $\frac{dy}{dx}$

قـــواعد المشتقة

القاعدة الاولى

مشتقة الثابت = صفر

$f(x) = 4 \quad \Longrightarrow f'(x) = 0$

$y = \frac{1}{2} \Longrightarrow \; y' = 0$

$f(x) = \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \; f'(x) = 0$

$y = ab \quad \Longrightarrow \; y' = 0$

القاعدة الثـانية

مشتقة حـد مرفـوع الى اس (نضرب الاس بالمعامل ونطرح من الاس واحـد)

$f(x) = ax^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n.ax^{n-1}$

$f(x) = 3x^4 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 12x^3$

$f(x) = 2x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 6x^2$

$f(x) = x^5 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 5x^4$

$f(x) = 5x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 10x$

$f(x) = x^{-3} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -3x^{-4}$

$f(x) = -2x^{-2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 4x^{-3}$

مـــلاحظة :

اذا كان اس x واحد فعند الاشتقاق تختفي x ويبقى المعامل فقط .

$$y = 4x \quad \Longrightarrow y' = 4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$y = -\sqrt{3}\,x \ \Longrightarrow y' = -\sqrt{3}$$

$$f(x) = a\pi x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = a\pi$$

مـــلاحظة:

اذا كان الاس كسر عندما نطرح واحد يكون الجواب كالاتي :

البسط - المقام
المقام

$$y = x^{\frac{3}{2}} \ \Longrightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \ \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$$

$$y = x^{\frac{1}{3}} \ \Longrightarrow y' = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} \ \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}$$

$$y = x^{\frac{-1}{2}} \ \Longrightarrow y' = \frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$$

$$f(x) = x^{\frac{-1}{3}} \ \Longrightarrow f'(x) = \frac{-1}{3}x^{\frac{-4}{3}}$$

مثال / جد مشتقة ما يأتي :

1) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

$f'(x) = 2x + 2$

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + \frac{1}{2}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$

3) $y = x^{\frac{1}{2}} + 2x + 5$

$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + 2$

4) $f(x) = 4x + 4$

$f'(x) = 4$

القاعدة الثالثة

مشتقة حاصل ضرب دالتين .

مشتقة الاولى × الثانية + مشتقة الثانية × الاولى = $\Longrightarrow$

1) $f(x) = (x^2 + 5x + 1)(x + 3)$

$f'(x) = (x^2 + 5x + 1)(1) + (x + 3)(2x + 5)$

2) $y = x^{\frac{1}{2}}(x + 6)$

$y' = x^{\frac{1}{2}}(1) + (x + 6)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)$

3) $f(x) = (x^3 - 3x)(x^2 - 2x + 4)$

$f'(x) = (x^3 - 3x)(2x - 2) + (x^2 - 2x + 4)(3x^2 - 3)$

4) $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

$f'(x) = (x^4 - x^2 + 1)(30x^5 - 3) + (5x^6 - 3x)(4x^3 - 2x)$

القاعدة الـرابعة

مشتقة الدالة الكسرية

$$\frac{\text{مشتقة المقام x البسط – مشتقة البسط x المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

1) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^3+1)(4x^3)-(x^4+1)(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$

2) $f(x) = \dfrac{4-5x}{x^2+2x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x+1)(-5)-(4-5x)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$$

القاعدة الـخامسة

مشتقة قوس مرفوع الى اس .

$$if\ y = [f(x)]^n \quad \Rightarrow \quad y' = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$$

1) $f(x) = (x^3+x^2+x+1)^5$

$$f'(x) = 5(x^3+x^2+x+1)^4(3x^2+2x+1)$$

2) $f(x) = (x^2-2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-2x+1)^{-\frac{1}{2}}(2x-2)$$

3) $f(x) = (\frac{x}{x+1})^4$

$$f'(x) = 4(\frac{x}{x+1})^3(\frac{(x+1)-(x)(1)}{(x+1)^2})$$

المشتقة الثانية : هـي مشتقة المشتقة الاولى ويرمز لها بالرمز $f''(x)$, y'' , $\frac{d^2y}{dx^2}$

مثال// اذا كانت $y = x^4 + 5x^3 + 3$ جد y'', y'

$$y = x^4 + 5x^3 + 3$$

$$y' = 4x^3 + 15x^2$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

مـشتقة الدالة الجذرية :

1- حول الجذر الى اس كسري حسب العلاقة $y = \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow y = (f(x))^{\frac{1}{n}}$

2- جــد المشتقة حسب القواعد الخمسة

3- تخلص من الاس السالب حسب القاعدة $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

1) $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

ملاحظة : اذا طلب مشتقة عند عدد اعمل ما يأتي :

1- جد المشتقة حسب القواعد

2- عوض العدد المعطى بالمشتقة .

مثال1// اذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$ جد $f'(x)$ عند $x = 1$

الحل/

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$$

$$f'(x) = 3(1)^2 - 8(1) + 1 = 3 - 8 + 1 = -4$$

مثال 2// اذا كانت $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$ جد $f'(2)$

الحل //

$$f'(x) = (4 - x)(2x) + (x^2 + 3)(-1)$$

$$f'(2) = (4 - 2)(2(2)) + (2^2 + 3)(-1)$$

$$= 2(4) - (4 + 3) = 8 - 7 = 1$$

مثال 3// اذا كانت $f(x) = \frac{4-5x}{x^2+x+1}$ جد $f'(x)$ عند $x = -1$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)(-5) - (4 - 5x)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{((-1)^2 + (-1) + 1)(-5) - (4 - 5(-1))(2(-1) + 1)}{((-1)^2 + (-1) + 1)^2}$$

$$= \frac{((1 - 1 + 1)(-5) - (4 + 5)(-2 + 1)}{(1 - 1 + 1)^2}$$

$$= \frac{(1)(-5) - (9)(-1)}{(1)^2} = \frac{-5+9}{1} = 4$$

مــثال// اذا كانت $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ جد $f'(0)$

الحل/

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f(x)=\frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\quad(2)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(0)=\frac{-1}{(2(0)+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{(0+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{1}=-1$$

س/ اذا كانت $f(x)=6\sqrt{3x^2+4}$ جد $f'(2)$ للدالة

(2015 دور ثالث)

مــثال// اذا كانت $f(x)=(x^3+3x^2-3)^{\frac{3}{2}}$ جد $f'(2)\,,f'(x)$

الحل /

$$f(x)=(x^3+3x^2-3)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x^3+3x^2-3)^{\frac{1}{2}}(3x^2+6x)$$

$$f'(2)=\frac{3}{2}((2)^3+3(2)^2-3)^{\frac{1}{2}}(3(2)^2+6(2))$$

$$=\frac{3}{2}(8+12-3)^{\frac{1}{2}}(12+12)$$

$$=\frac{3}{2}(20-3)^{\frac{1}{2}}\quad(24)$$

$$=36\,(17)^{\frac{1}{2}}$$

مــثال// اذا كانت $f(x) = (x^2-3)^4$ جد $f''(x), f'(x)$ عند $x = 2$

الحل /

$f(x) = (x^2-3)^4$

$f'(x) = 4(x^2-3)^3(2x)$

$f'(x) = 8x(x^2-3)^3$

$f'(2) = 8(2)((2)^2-3)^3$

$= 16(4-3)^3 = 16(1)^3 = 16$

$f''(x) = 8x[3(x^2-3)^2(2x)] + (x^2-3)^3(8)$

$= 8[6x(x^2-3)^2] + 8(x^2-3)^3$

$= 48x^2(x^2-3)^2 + 8(x^2-3)^3$

$f''(2) = 48(2)^2((2)^2-3)^2 + 8((2)^2-3)^3$

$= 48(4)(4-3)^2 + 8(4-3)^3$

$= 192 + 8 = 200$

مـثال// اذا كانت $f(x) = 2x^3 + 4 + \frac{3}{x}$ جد $f''(-1),\ f''(x), f'(x)$

الحل/

$f(x) = 2x^3 + 4 + \frac{3}{x}$

$f(x) = 2x^3 + 4 + 3x^{-1}$

$f'(x) = 6x^2 - 3x^{-2} = 6x^2 - \frac{3}{x^2}$

$f''(x) = 12x + 6x^{-3} = 12x + \frac{6}{x^3}$

$f''(-1) = 12(-1) + \frac{6}{(-1)^3} = -12 + \frac{6}{-1}$

$= -12 - 6 = -18$

س/ جد مشتقة ما يأتي

1) $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x^3+3}\right)^5$

2) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$

(2015 دور اول)

التطبيقات الهندسية على المشتقة.

اولاً: ايجاد معادلة المماس والعمود على المماس .

خــــــــطوات الحل :

1- عوض قيمة x او y المعطاة في السؤال لايجاد نقطة التماس
2- جد المشتقة
3- عوض قيمة x في المشتقة تحصل على ميل المماس.
4- اكتب العلاقة $y - y_1 = m(x - x_1)$
5- عوض الميل ونقطة المماس بالعلاقة ثم اجري العمليات الحسابية تحصل على المطلوب .

مــثال // جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 5x + 2$ عند $x = 1$

الحل/

$f(x) = x^2 - 5x + 2$

$= (1)^2 - 5(1) + 2$

$= 1 - 5 + 2 = -2$

(1 , -2) نقطة التماس

$f'(x) = 2x - 5$

$f'(1) = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3$ ميل المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = -3(x - 1)$$

$$y + 2 = -3x + 3$$

$$y + 2 + 3x - 3 = 0$$

$$y + 3x - 1 = 0$$

مـثال// جد معادلة مماس المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ عند $x = 0$

الحل/

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 9(0) + 5$$

نقطة التماس $(0\ ,5)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$$

ميل المماس $f'(0) = 3(0)^2 - 6(0) + 9 = 9$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 9(x - 0)$$

$$y - 5 = 9x$$

$$y - 5 - 9x = 0$$

$$y - 9x - 5 = 0$$

معادلة المماس

مثال / جد معادلة المماس للمنحني $y = x^2 + 1$ عند نقطة تقاطع المنحني مع محور الصادات .

الحل/ نقطة تقاطع المنحني مع محور الصادات يعني x=0

$$y = (0)^2 + 1 = 1$$

نقطة التماس $(0,1)$

$$y' = 2x$$

ميل المماس $y' = 2(0) = 0$

ميل المماس

$$y - y1 = m(x - x1)$$

$$y - 1 = (0)(x - 0)$$

$$y - 1 = 0$$

مثال // جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$ عند x=5

$$f(5)=\sqrt[3]{5+3}=\sqrt[3]{8}=2$$

(5, 2) نقطة التماس

$$f(x)=(x+3)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3(x+3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$f'(5)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(5+3)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(8)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}$$

$$=\frac{1}{3(4)}=\frac{1}{12}$$ ميل المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=\frac{1}{12}(x-5)$$

$$12y-24-x+5=0$$

$$12y-x-19=0$$

معادلة المماس

مثال /واجب/ جد معادلة المماس للمنحني $f(x)=x^3-2x+\frac{3}{x^2+2}$ عند $x=-1$



ملاحظة: اذا كان المطلوب معادلة العمود على المماس خطوات الحل هي نفسها لكن الاختلاف في الميل حيث يكون ميل العمود هو مقلوب ميل المماس بالعدد والاشارة .

مثال// جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y = (x-3)^3$ عند $x = 2$

الحل//

$$y = (2-3)^3 = (-1)^3 = -1$$

نقطة التماس (2, -1)

$$y' = 3(x-3)^2$$

ميل المماس $y' = 3(2-3)^2 = 3(-1)^2 = 3(1) = 3$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 1 = 3(x-2)$$
$$y + 1 = 3x - 6$$

$$y + 1 - 3x + 6 = 0$$
$$y - 3x + 7 = 0$$

معادلة المماس

ميل المماس=3

ميل العمود $= \frac{-1}{3}$

$$y + 1 = \frac{-1}{3}(x-2)$$

$$3y + 3 = -x + 2$$

$$3y + 3 + x - 2 = 0$$

$$3y + x + 1 = 0$$

معادلة العمود على المماس .

مثال// جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y=\frac{2x+1}{3-x}$ عند $y=5$

الحل//

$$5=\frac{2x+1}{3-x}$$

$$2x+1=15-5x$$

$$2x+5x=15-1$$

$$7x=14 \quad \div 7$$

$$x=2$$

نقطة التماس (2, 5)

$$y'=\frac{(3-x)(2)-(2x+1)(-1)}{(3-x)^2}$$

$$y'=\frac{(3-2)(2)-(4+1)(-1)}{(3-2)^2}=\frac{2+5}{1}=7$$ ميل المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-5=7(x-2)$$

$$y-5=7x-14$$

$$y-5-7x+14=0$$

$$y-7x+9=0$$ معادلة المماس

ميل المماس =7 $\Leftarrow$ ميل العمود = $\frac{-1}{7}$

$$y-5=\frac{-1}{7}(x-2)$$

$$7y-35=-x+2$$

$$7y-35+x-2=0$$

$$7y+x-37=0$$

معادلة العمود على المماس

س// جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y=x^3-3x^2+5$ عند $x=1$

(2015 دور ثالث)

ثانيا: ايجاد النقاط

خطوات الحل :

1- جد الميل بعد كلمة يوازي { محور السينات ← الميل =صفر ؛ المستقيم ← الميل = $\frac{-\text{معامل}\,x}{\text{معامل}\,y}$ }

2- جد المشتقة

3- اجعل المشتقة = الميل

4- حل المعادلة تحصل على قيم x

5- عوض قيم x في الدالة الاصلية تحصل على قيم y والنقاط .

مثال/ جد نقطة تنتمي الى منحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y + 2x + 3 = 0$

الحل// الميل $m = \frac{-2}{1} = -2$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = -2$$

$$2x = -2 + 4$$

$$2x = 2 \qquad \div 2$$

$$x = 1$$

$$f(1) = (1)^2 - 4(1) + 5$$

$$= 1 - 4 + 5 = 2$$

اذا النقطة (1,2)

س/ جد نقطة تنتمي الى منحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y = -3 - 2x$ (2016 دور ثاني)

س/ جد نقطة تنتمي الى منحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $2x - y = 0$ (2015 دور ثاني)

مثال// جد النقط على المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ بحيث يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات .

الحل//

$$m = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad \div 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

اما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4$$

$$= 27 - 27 - 27 + 4 = -23$$

(3,-23)

او $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4$$

$$= -1 - 3 + 9 + 4 = 9$$

(-1,9)

* التطبيقات الفيزيائية على المشتقة *

1- اذا كان المطلوب (ازاحة ، موضع ، بعد) عوض الزمن بالدالة الاصلية. S(t)

2- اذا كان المطلوب سرعة عوض الزمن بالمشتقة الاولى ويرمز لها بالرمز v(t)=s'(t)

3- اذا كان المطلوب تعجيل عوض الزمن بالمشتقة الثانية ويرمز بالرمز a(t)=v'(t)

S(t) اشتق V(t) اشتق $a(t)$

ملاحظة :اذا كان الزمن غير معلوم يكون بأحد الاحتمالين

الاحتمال الاول :اذا اعطي في السؤال سرعة اعمل ما يأتي .

1- جد المشتقة
2- اجعل المشتقة = السرعة
3- حل المعادلة تحصل على الزمن

الاحتمال الثاني: اذا اعطي في السؤال تعجيل اعمل ما ياتي .

1- جد المشتقة الثانية
2- اجعل المشتقة = السرعة
3- حل المعادلة تحصل على الزمن

مثال/ جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة حيث $s(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 1$ حيث S(6) تقاس بالأمتار والزمن بالدقائق جد موضعه وسرعته وتعجيله بعد (5) دقائق من بدأ الحركة.

الحل// $s(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 1$

$$s(5) = (5)^3 + 3(5)^2 + 4(5) + 1$$

الموضع $= 125 + 75 + 20 + 1 = 221$

$$v(t) = S'(t) = 3t^2 + 6t + 4$$

$$v(5) = 3(5)^2 + 6(5) + 4$$

السرعة $= 75 + 30 + 4 = 109$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t+6$$

التعجيل $a(5) = 6(5) + 6 = 30 + 6 = 36$

مثال/ يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = t^2 - 20t + 120$ حيث يقاس البعد بالكيلومترات والزمن بالساعات احسب 1-السرعة بعد خمس ساعات 2- بعده عندما تصبح سرعته صفرا

الحل// -1 $v(t) = s'(t) = 2t - 20$

السرعة $v(5) = 2(5) - 20 = 10 - 20 = -10$

-2 $v(t) = 0$

الزمن $2t - 20 = 0 \Rightarrow 2t = 20 \Rightarrow t = 10$

$S(10) = (10)^2 - 20(10) + 120$

البعد $= 100 - 200 + 120 = 20$

مثال/اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t) = t^3 - 6t^2 + 18t + 12$ حيث $s(t)$ بالامتار و t الزمن بالثانية ، احسب بعد الجسم من نقطة بداية الحركة وسرعته عندما يصبح تعجيله صفرا.

الحل// $s(t) = t^3 - 6t^2 + 18t + 12$

$s'(t) = 3t^2 - 12t + 18$

$s''(t) = 6t - 12$

الزمن $6t - 12 = 0 \Rightarrow 6t = 12 \Rightarrow t = 2$

$s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 18(2) + 12$

بعد الجسم $= 8 - 24 + 36 + 12 = 32$

$s'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 18$

السرعة $= 12 - 24 + 18 = 6$

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم وفق المعادلة $s(t) = t^2 + 3t + 2$ جد سرعة الجسم بعد 5 ثواني من بدء الحركة علماً ان الازاحة بالامتار (2015 دور ثاني)

مثال/ قذف جسم نحو الاعلى عن سطح الارض بإزاحة معطاة وفق العلاقة $s(t) = 96t - 16t^2$ حيث ان $s(t)$ الازاحة بالأمتار و t بالثانية احسب 1- سرعة الجسم بعد ثانيتين 2- متى تصبح سرعة صفرا .

الحل//

$1) \quad s(t) = 96t - 16t^2$

$s'(t) = 96 - 32t$

السرعة بعد ثانيتين

$s'(2) = 96 - 32(2) = 96 - 64 = 32$

عندما تصبح السرعة =صفر 2)

$s'(t) = 96 - 32t$

$96 - 32t = 0$

$32t = 96 \qquad \div 32$

$t = 3$ ثانيه

مثال/ اذا تحرك جسم وفق *العلاقة* $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 7$ حيث S بعده بالامتار t الزمن بالثانية احسب .

1- بعد الجسم من نقطة بداية الحركة عندما تصبح سرعة صفرا .

2- بعد الجسم من نقطة بداية الحركة عندما يصبح تعجيله صفرا .

الحل//

$1\text{-}s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 7$

$s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$3t^2 - 12t + 9 = 0 \qquad \div 3$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t - 3)(t - 1) = 0$

اما $t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3$ الزمن

او $t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

$s(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 7$

$= 27 - 54 + 72 + 7 = 7$ البعد

$s(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 7 = 1 - 6 + 9 + 7 = 11$ البعد

رحلة التفوق في السادس

2-$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 7$

$s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$s''(t) = 6t - 12$

$6t - 12 = 0 \Rightarrow 6t = 12 \Rightarrow t = 2$ الزمن

$s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 7$

$= 8 - 24 + 18 + 7 = 9$ البعد

مثال/ يتحرك جسم على خط مستقيم وحسب العلاقة $s(t) = \sqrt{2t+1}$ اوجد الزمن الذي يستغرقه حتى تصبح سرعته $\frac{1}{3}$ م/ثا

الحل//

$$s(t) = (2t+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$s'^{(t)} = \frac{1}{2}(2t+1)^{\frac{-1}{2}}(2) = \frac{1}{(2t+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{3}$ طرفين × وسطين

$\sqrt{2t+1} = 3$ بتربيع الطرفين

$2t + 1 = 9$

$2t = 9 - 1 \Rightarrow 2t = 8 \Rightarrow t = 4$ الزمن

مثال /واجب/ جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث بعده بالأمتار والزمن بالثواني معطى بالعلاقة $s(t) = \sqrt{(2t^2 + 18)}$ احسب بعده عندما تصبح سرعته 1 م/ثا

مثال /واجب/ جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t) = t^2 + 3t + 2$ جد سرعة الجسم بعد5 ثواني من بدء الحركة علما ان الازاحة بالأمتار .

التطبيقات الاقتصادية على المشتقة

لتكن $c(x)$ دالة الكلفة الكلية

1- اذا كان المطلوب دالة الكلفة الحدية جد المشتقة c(x) ويرمز لها بالرمز μc

2- اذا كان المطلوب دالة معدل الكلفة (الكلية) قسم الدالة على x .

ويرمز لها بالرمز $AC = \frac{C(X)}{X}$

3- اذا كان المطلوب دالة معدل الكلفة الحديه جد المشتقة AC'

4- اذا كان المطلوب حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة اجعل $AC' = 0$ ثم حل المعادلة .

$c(x)$ دالة الكلفة الكلية

اشتق ← μc دالة الكلفة الحدية

قسم على X ← AC دالة معدل الكلفة (الكلية)

اشتق ↓

AC' دالة معدل الكلفة الحدية

اجعل ↓

$AC' = 0$

حجم الانتاج

مثال/ لنفرض ان دالة الكلفة الكلية لإنتاج سلعه ما هي $c(x) = 3x^2 - 60x + 1200$ جد

-1 دالة الكلفة الحدية -2 دالة معدل الكلفة الكلية -3 دالة معدل الكلفة الحدية

-4 حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة والكلفة الكلية .

الحل// دالة الكلفة الحدية $1\text{-}\ \mu c = c'(x) = 6x - 60$

$2\text{-}\ AC = \frac{C(X)}{X} = \frac{3x^2}{x} - \frac{60x}{x} + \frac{1200}{x}$

$= 3x - 60 + \frac{1200}{x}$ الدالة معدل الكلفة

$3\text{-}\ AC' = 3 + \frac{x(0)-1200(1)}{x^2}$

$= 3 - \frac{1200}{x^2}$ دالة معدل الكلفة الحدية

$4\text{-}\ 3 - \frac{1200}{x^2} = 0 \qquad \times x^2$

$3x^2 - 1200 = 0 \qquad \div 3$

$x^2 - 400 = 0$ حجم الانتاج

$x^2 = 400 \Longrightarrow x = 20$

$c(20) = 3(20)^2 - 60(20) + 1200$

$= 1200 - 1200 + 1200$

$= 1200$ و الكلفة الكلية

مثال/ لتكن دالة الكلفة الكلية $c(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ جد دالة الكلفة الحدية ، ودالة معدل الكلفة الكلية .

الحل// $\mu c = c'(x) = \frac{1}{2}2x - 2$

$= x - 2$ دالة الكلفة الحدية

$AC = \frac{C(X)}{X} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{5}{x}$

$= \frac{1}{2}x - 2 + \frac{5}{x}$ دالة معدل الكلفة الكلية

مثال/ اذا كانت دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعه ما هي $c(x) = \frac{1}{9}x^2 + 6x + 100$ جد حجم الانتاج الذي عنده يكون معدل الكلفة اقل ما يمكن .

الحل/

$$AC = \frac{C(X)}{X} = \frac{\frac{1}{9}x^2}{x} + \frac{6x}{x} + \frac{100}{x}$$

$$= \frac{1}{9}x + 6 + \frac{100}{x}$$

$$AC' = \frac{1}{9} + \frac{x(0) - 100(1)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{100}{x^2}$$

$$\frac{1}{9} - \frac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 900 = 0$$

$$x^2 = 900$$

$x = 30$ حجم الانتاج

مثال/ لنفرض ان الكلفة الكلية لصنع x من وحدات السلعة ما هي $c(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$

جد الكلفة الحدية عندما يكون عدد الوحدات المصنوعة 50

الحل//

$$c'(x) = 30 + \frac{x(0)-20(1)}{x^2}$$

$$= 30 - \frac{20}{x^2}$$

عندما تكون عدد الوحدات المصنوعة 50

$$\Rightarrow x = 50$$

$$\mu c = 30 - \frac{20}{(50)^2}$$

$$= 30 - \frac{20}{2500} = 30 - \frac{1}{125}$$

$$= \frac{3750-1}{125} = \frac{3749}{125}$$

مثال/واجب/اذا كانت دالة الكلفة لانتاج سلعة ما هي $c(x)=\frac{1}{2}x^2+x+40$ جد حجم الانتاج الذي يكون عنده معدل الكلفة اقل ما يمكن .

مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى

1- جد المشتقة

2- اجعل المشتقة = صفر

3- حل المعادلة تحصل على قيم x

4- عوض قيم x بالدالة الاصلية تحصل على قيم y والنقاط الحرجة

5- ارسم خط الاعداد وضع علية قيم x فقط .

6- (شفويا) من كل منطقة ناخذ رقم نعوضه بالمشتقة لتحصل على اشاره موجبة او سالبة

7-اسفل خط الاعداد نرسم مستقيم ومن جهة اليسار. يكون اتجاهه نحو الاعلى اذا كانت المنطقة تحمل اشارة موجبة والى الاسفل اذا كانت المنطقة تحمل الاشارة السالبة .

8- يكون الجواب كالاتي :

أ- الدالة متزايدة في المنطقة التي تحمل موجب

ب- الدالة متناقصة في المنطقة التي تحمل سالب

ت-تكون النقطة نهاية عظمى اذا التقى السهمان في الاعلى ↗ ↘

ث-تكون النقطة نهاية صغرى اذا التقى السهمان في الاسفل ↘ ↗

ج- تكون النقطة نقطة حرجة فقط اذا لم يلتقي السهمان ↗↗ او ↘↘

[اشتق ⟸ اجعل المشتقة = صفر ⟸ حل المعادلة تحصل على x ⟸عوض بالدالة الاصلية تحصل على y ⟸ ارسم خط الاعداد]

مثال/ جد مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى لكل مما يأتي .

الحل//

$$1-f(x)=x^2-4x+3$$

$$f'(x)=2x-4$$

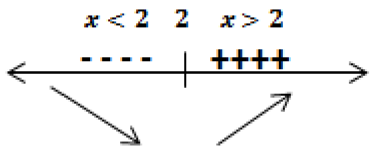
$$2x-4=0 \qquad \div 2$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$f(2)=(2)^2-4(2)+3$$

$$=4-8+3=-1$$

نقطة حرجة (2,-1)



الدالة متزايدة في {x:x > 2}

الدالة متناقصة في {x:x < 2}

(2,-1) نهاية صغرى محلية

$$2-f(x)=(2-x)^3$$

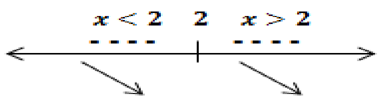
$$f'(x)=3(2-x)^2(-1)$$

$$-3(2-x)^2=0$$

$$2-x=0 \Rightarrow x=2$$

$$f(2)=(2-2)^3=0$$

(2,0) نقطة حرجة



الدالة متناقصة في {x:x < 2}

الدالة متناقصة في {x:x > 2}

(2,0) حرجة فقط .

3 − $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \qquad \div 3$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2$$

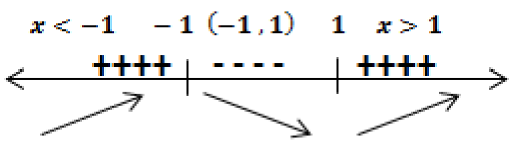
$$= 1 - 3 + 2 = 0$$

(1,0) نقطة حرجة

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2$$

$$= -1 + 3 + 2 = 4$$

(-1,4) نقطة حرجة



الدالة متزايدة في {x:x > 1}

الدالة متناقصة في (-1,1)

الدالة متزايدة في {x:x < -1}

(1, 0) نهاية صغرى محلية ، (-1, 4) نهاية عظمى محلية

واجب

$4 - f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$5 - f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad \div 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

اما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

او $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 7$$

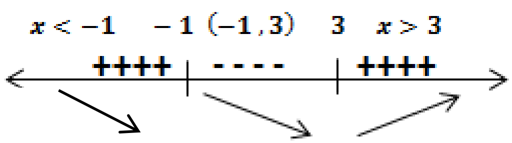
$$= 27 - 27 - 27 + 7 = -20$$

نقطة حرجة $(3, 20)$

$$f(-1) - 3(-1)^3 - 9(-1)^2 + 7$$

$$= -1 - 3 + 9 + 7 = 12$$

نقطة حرجة (-1,12)



الدالة متزايدة في {x:x > 3}

الدالة متناقصة في(-1,3)

الدالة متزايدة في {x:x < -1}

(3, -20) نهاية صغرى محلية

(-1, 12) نهاية عظمى محلية .

$6 - f(x) = x^3(-4 + x)$

$$f(x) = -4x^3 + x^4$$

$$f'(x) = -12x^2 + 4x^3$$

$$-12x^2 + 4x^3 = 0 \qquad \div 4$$

$$-3x^2 + x^3 = 0$$

$$x^2(-3 + x) = 0$$

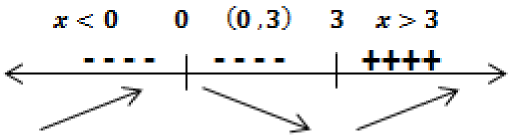
اما $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
او $-3 + x = 0 \Rightarrow x = 3$

$$f(0) = -4(0)^3 + (0)^4 = 0$$

نقطة حرجة (0,0)

$$f(3) = -4(3)^3 + (3)^4 = -108 + 81 = -27$$

نقطة حرجة (3,-27)



الدالة متزايدة في $\{x : x > 3\}$

الدالة متناقصة في(0,3)

الدالة متناقصة في $\{x : x < 0\}$

(0,0)حرجة فقط

(3,-27)نهاية صغرى محلية

الواجبات

7) $f(x) = x^4 - 1$

8) $f(x) = x^3$

9) $f(x) = (x-1)^3$

10) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

11) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

12) $f(x) = 5 + 4x^3 - x^4$

13) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

ايجاد الثوابت باستخدام النهايات العظمى والصغرى

ملاحظة: عدد الافكار يجب ان تساوي عدد الثوابت في السؤال .

1- اذا اعطي نقطة في السؤال فان النقطة تحقق المعادلة .

(نعوض بدل x بما يساويها ونجعل المعادلة $=$ قيمة y)

2- اذا اعطي في السؤال نقطة نهاية عظمى او صغرى او محلية او حرجة اعمل ما يأتي.

أ- جد المشتقة

ب- اجعل المشتقة =صفر

ج- عوض قيمه x بالمشتقة تحصل على معادلة

3- اذا اعطي في السؤال نقطة تماس اعمل ما يأتي .

أ- جد المشتقة

ب- اجعل المشتقة =ميل المماس

ج- عوض قيمه x بالمشتقة تحصل على معادلة

4- حل المعادلات تحصل على المطلوب .

مثال/ اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + ax + b$ وكان ميل مماس المنحني عند x=-1 هو 4 وكان المنحني يمر بالنقطة (-3,2) جد قيمة a , b الحقيقين .

الحل// ميل المماس = 4 و x=-1

$$f'(x) = 2x + a$$

$$2(-1) + a = 4$$

$$-2 + a = 4 \Rightarrow a = 4 + 2 \Rightarrow a = 6$$

$f(x) = x^2 + 6x + b$ تحقق المعادلة (-3,2)

$$(-3)^2 + 6(-3) + b = 2$$

$$9 - 18 + b = 2$$

$$-9 + b = 2 \Rightarrow b = 2 + 9 \Rightarrow b = 11$$

مثال/ اذا علمت ان النقطة (2,1)هي نقطة النهاية الصغرى المحلية للدالة $f(x) = a + (x - b)^2$ فجد قيمة كل من a ,b∈ R

الحل//

$$f'(x) = 2(x - b)(1)$$

$$2(x - b) = 0$$

$$2(2 - b) = 0 \qquad \div 2$$

$$2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$f(x) = a + (x - b)^2$ تحقق المعادلة (2,1)

$$a + (2 - 2)^2 = 1$$

$$a + 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

مثال/ اذا كانت الدالة $f(x) = x^3 + ax + 5$ لها نقطة نهاية محلية عند x=1 جد قيمة a ثم بين نوع النهاية .

الحل//

$$f'(x) = 3x^2 + a$$

$$3(1)^2 + a = 0$$

$$3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \qquad \div 3$$

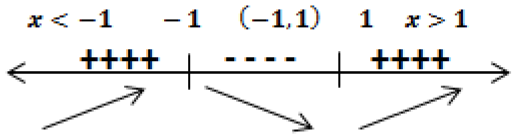
$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(1) = 1 - 3 + 5 = 3$$

نقطة حرجة (1,3)

$$f(-1) = -1 + 3 + 5 = 7$$

نقطة حرجة (-1,7)



الدالة متزايدة في {x:x > 1}

الدالة متناقصة في(-1,1)

الدالة متزايدة في {x:x < -1}

(1, 3) نهاية صغرى محلية

(-1, 7) نهاية عظمى محلية

مثال/ اذا كانت النقطة (1,4) نقطة حرج الدالة $f(x) = 3 + ax + bx^2$ فما قيمة $a ,b\in R$ وما نوع النقطة الحرج .

الحل//

$$f'(x) = a + 2bx$$

$$a + 2b(1) = 0$$

$$a + 2b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

تحقق المعادلة (1,4)

$$3 + a(1) + b(1)^2 = 4$$

$$3 + a + b = 4$$

$$a + b = 4 - 3$$

$$a + b = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$a^{-} +^{-} 2b = 0$$ بالطرح

$$-b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

نعوض قيمة b في 1

$$a + 2(-1) = 0$$

$$a - 2 = 0 \quad \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 3 + 2x - x^2$$

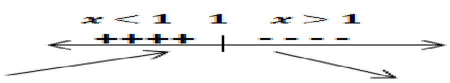
$$f'(x) = 2 - 2x$$

$$2 - 2x = 0 \qquad \div 2$$

$$1 - x = 0 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 3 + 2 - 1 = 4$$

نقطة حرجة (1,4)



الدالة متناقصة في {x:x > 1} ، الدالة متزايدة في{x:x < 1} ، (1,4) نهاية عظمى محلية

مثال/ اذا كانت الدالة $f(x) = ax^3 + bx$ وكانت $f(x)$ تمتلك نهاية محلية عند النقطة (1,-2) فما قيمة كل من a ,b$\in R$ وما نوع هذه النهاية .

واجب

مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

1- جد المشتقة الثانية

2- اجعل المشتقة الثانية = صفر

3- حل المعادلة تحصل على قيم x .

4- عوض قيم x بالدالة الاصلية تحصل على قيم y والنقاط

5- ارسم خط الاعداد وضع علية قيم x فقط .

6- (شفويا) من كل منطقة نأخذ رقم ونعوضه بالمشتقة الثانية نحصل على اشارة موجبة او سالبة

7- يكون الجواب كالاتي .

أ- اذا كانت الاشارة موجبة فان الدالة مقعرة .
ب- اذا كانت الاشارة سالبة فان الدالة محدبة .
ت- اذا تغيرت الاشارة حول النقطة تكون نقطة انقلاب .

ملاحظة : اذا كانت المشتقة الثانية تساوي عدد موجب فقط (خالي من x) فان الدالة مقعرة في مجالها ولا توجد نقاط انقلاب .

ملاحظة : اذا كانت المشتقة الثانية تساوي عدد سالب فقط (خالي من x) فان الدالة محدبة في مجالها ولا توجد نقاط انقلاب .

مثال / جد نقاط الانقلاب للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ان وجدت ؟

الحل//

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f''(x) = 2$$

اذا الدالة مقعرة في مجالها

ولا توجد نقاط انقلاب

مثال / لتكن $f(x) = 3 - 2x - x^2$ جد نقاط الانقلاب ان وجدت ؟

الحل//

$$f'(x) = -2 - 2x$$

$$f''(x) = -2$$

اذا الدالة محدبة في مجالها

ولا توجد نقاط انقلاب

مثال / لتكن $f(x) = x^3 - 3x + 2$ جد نقاط الانقلاب ان وجدت ؟

الحل//

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

$$6x = 0 \qquad \div 6$$

$$x = 0$$

$$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$$

(0,2)

اشارة $f''(x)$

$x < 0$ 0 $x > 0$

---- | ++++

∩   ∪

الدالة مقعرة في {x:x> 0}

الدالة محدب في {x:x< 0}

نقطة انقلاب (0,2)

مثال/ جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب ان وجدت لكل مما يأتي .

1- $f(x) = x^5$

$f'(x) = 5x^4$

$f''(x) = 20x^3$

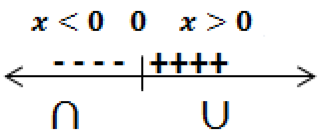
$20x^3 = 0 \qquad \div 20$

$x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$f(0) = (0)^5 = 0$

(0,0)

اشارة $f''(x)$



الدالة مقعرة في {x:x> 0}

الدالة محدب في {x:x< 0}

نقطة انقلاب (0,0)

2- $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

$f'(x) = 4x - 4$

$f''(x) = 4$

اذا الدالة مقعرة في مجالها

ولا توجد نقاط انقلاب

3- $f(x) = 3x - x^3$

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

$$f''(x) = -6x$$

$$-6x = 0 \qquad \div -6$$

$$x = 0$$

$$f(0) = 3(0) - (0)^3 = 0$$

(0,0)

$x < 0 \quad 0 \quad x > 0$

++++ | - - - -

∪ ∩

اشارة $f''(x)$

الدالة محدبة في $\{x : x > 0\}$

الدالة مقعرة في $\{x : x < 0\}$

نقطة انقلاب (0,0)

4- $f(x) = x^3 - 3x^2$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$6x - 6 = 0 \qquad \div 6$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 = 1 - 3 = -2$$

(1,-2)

$x < 1 \quad 1 \quad x > 1$

- - - - | ++++

∩ ∪

اشارة $f''(x)$

الدالة مقعرة في $\{x : x > 1\}$

الدالة محدب في $\{x : x < 1\}$

نقطة انقلاب (1,-2)

س/ اذا كانت الدالة $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ تمتلك نقطة انقلاب $(1, -2)$ جد قيمة $a , b \in R$

(2016 دور ثاني)

س/ جد النقاط الحرجة والانقلاب ان وجدن للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 2$

(2016 دور ثالث)

واجبات

5- $f(x) = x^3 - 3x$

6- $f(x) = (x-2)^3 + 3$

7- $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

8- $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

رسم الدوال

1- نقاط التقاطع مع المحورين

أ- مع محور الصادات

اجعل $x = 0$ ثم عوضها بـ الدالة الاصلية تحصل على قيم y .

ب- مع محور السينات

اجعل $y = 0$ (اي اجعل الدالة الاصيلة = صفر ثم حل المعادلة تحصل على قيم x)

2- جد النهايات العظمى و الصغرى

3- جد نقاط الانقلاب

4- ا رسم الدالة

مثال// ارسم منحني الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 3$

الحل/ 1- نقاط التقاطع

$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(0) = (0)^2 + 4(0) + 3 = 3$

(0,3) نقاط تقاطع

$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x + 3)(x + 1) = 0$

اما $+3 = 0 \Longrightarrow x = -3$

نقطة تقاطع (-3,0)

$y + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$

نقطة تقاطع $(-1\,,0)$

2-النهايات :

$f'(x) = 2x + 4$

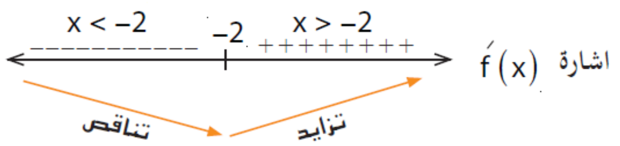
$2x + 4 = 0 \qquad \div 2$

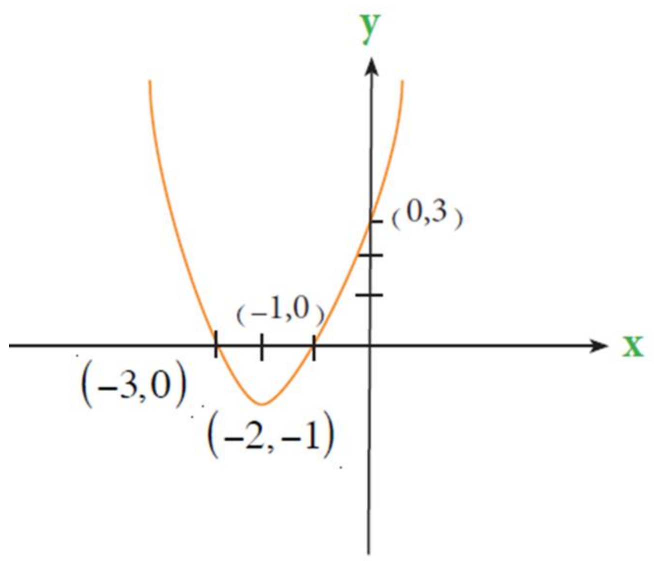
$x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = -2}$

$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3$

$= 4 - 8 + 3 = -1$

نقطة حرجة $(-2\,,-1)$





الدالة متزايدة في $\{x: x > -2\}$

الدالة متناقصة في $\{x: x < -2\}$

نهاية صغرى محلية (-2,-1)

3- نقاط الانقلاب

$f''(x) = 2$

الدالة مقعره في مجالها ولا توجد نقاط

مثال// ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x$

الحل/

نقاط التقاطع

$x = 0 \implies f(0) = (0)^3 - 3(0) = 0$

نقطة تقاطع (0,0)

$y = 0 \implies x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$

اما $\boxed{x = 0}$

او $x - \sqrt{3} = 0 \implies \boxed{x = \sqrt{3}}$

او $x + \sqrt{3} = 0 \implies \boxed{x = -\sqrt{3}}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$(x - 1)(x + 1) = 0$

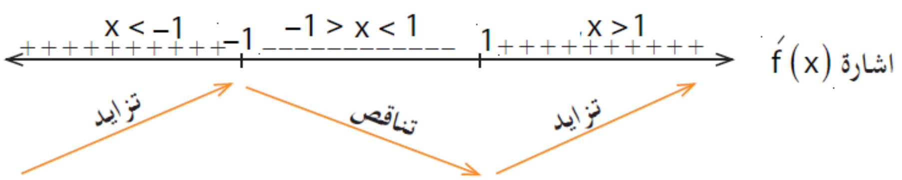
اما X=1 OR x=-1

$f(1) = (1)^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$

نقطه حرجه $(1, -2)$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

نقطه حرجه $(-1, 2)$



الدالة متزايدة في $\{x: x > 1\}$

الدالة متناقصه في $(-1, 1)$

الدالة متزايدة في $\{x: x < -1\}$

نهاية صغرى محلية $(1, -2)$

$(-1,2)$ نهاية عظمى محلية

-1 نقطة انقلاب

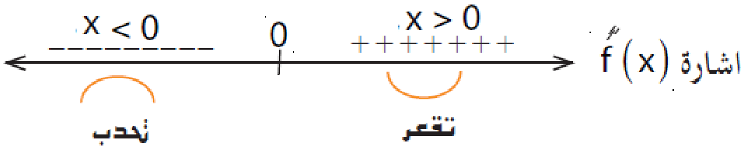
$f''(x) = 6x$

$6x = 0 \qquad \div 6$

$\boxed{x = 0}$

$f(0) = (0)^3 - 3(0) = 0$

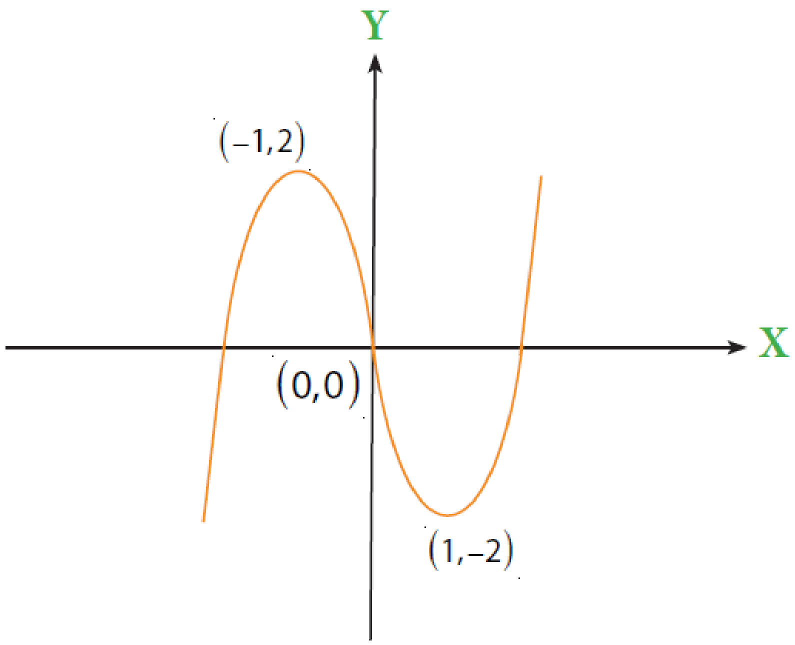
$(0,0)$



الدالة مقعرة في $\{x: x > 0\}$

الدالة متزايدة في $\{x: x < 0\}$

نقطة انقلاب $(0,0)$



مثال// ارسم منحني الدالة $f(x) = 3x - x^3$

1) نقاط التقاطع

$$x = 0 \to f(0) = 3(0) - (0)^3 = 0$$

(0,0) نقطة تقاطع

$$y = 0 \Longrightarrow 3x - x^3 = 0$$

$$x(3 - x^2) = 0$$

$$x(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) = 0$$

اما $x = 0$

او $\sqrt{3} - x = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{3}$

او $\sqrt{3} + x = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{3}$

نقاط تقاطع $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$

2) النهايات

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

$$3 - 3x^2 = 0 \qquad \div 3$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$(1 - x)(1 + x) = 0$$

اما $1 - x = 0 \Longrightarrow x = 1$

او $1 + x = 0 \Longrightarrow x = -1$

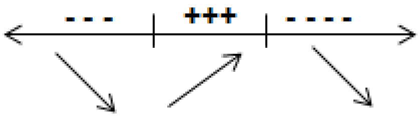
$$f(1) = 3(1) - (1)^3 = 3 - 1 = 2$$

نقطة حرجه(1,2)

$$f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -3 + 1 = -2$$

نقطة حرجه(-1,-2)

اشارة $f'(x)$



الدالة متزايدة في (1,1-)

الدالة متناقصة في $\{x : x > 1\}$

الدالة متناقصة في $\{x : x < -1\}$

نهاية عظمى محلية(1,2)

نهاية صغرى محلية(2-,1-)

3) نقاط الانقلاب

$$f''(x) = -6x$$

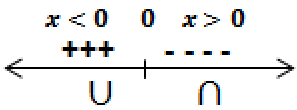
$$-6x = 0$$

$$x = 0$$

$$f(0) = 3(0) - (0)^3 = 0$$

(0,0)

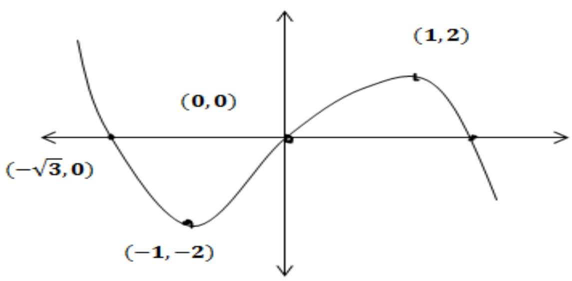
اشارة $f''(x)$



الدالة محدبة في $\{x : x > 0\}$

الدالة مقعرة في $\{x : x < 0\}$

(0,0) نقطة انقلاب



مثال// ارسم منحني الدالة $f(x)=(x-1)^3$

1) نقاط التقاطع

$$x=0 \Rightarrow f(0)=(0-1)^3=(-1)^3=-1$$

(0,-1) نقطة تقاطع

$$y=0 \Rightarrow (x-1)^3=0$$

$$x-1=0$$

$$x=1$$

(1,0) نقطة تقاطع

2) النهايات

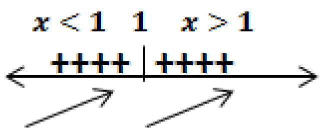
$$f'(x)=3(x-1)^2(1)$$

$$3(x-1)^2=0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$f(1)=(1-1)^3=0$$

(1,0) نقطة حرجة



اشارة f'

الدالة متزايدة في $\{x: x>1\}$

الدالة متزايدة في $\{x: x<1\}$

(1,0) نقطة حرجة فقط

3) نقاط الانقلاب

$$f''(x)=6(x-1)(1)$$

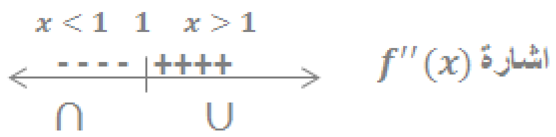
$$6(x-1)=0$$

$$x-1=0$$

$$x = 1$$

$$f(1) = (1-1)^3 = 0$$

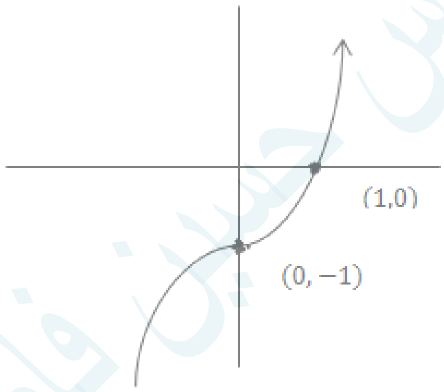
(1,0)



الدالة محدبة في $\{x: x<1\}$

الدالة مقعرة في $\{x: x>1\}$

نقطة انقلاب (1,0)



مثال// ارسم منحني الدالة $f(x) = (x+1)^3 - 1$

1) نقاط التقاطع

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = (0+1)^3 - 1$$

$$= 1 - 1 = 0$$

نقطة تقاطع (0, 0)

$$y = 0 \Rightarrow (x+1)^3 - 1 = 0$$

$$(x+1)^3 = 1$$

$$x + 1 = 1$$
$$x = 1 - 1$$

$$x = 0$$

نقطة تقاطع (0,0)

2) النهايات

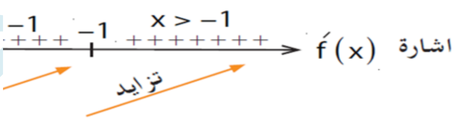
$$f'(x) = 3(x+1)^2(1)$$

$$3(x+1)^2 = 0$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f(-1) = (-1+1)^3 - 1 = 0 - 1 = -1$$

نقطة حرجة (-1,-1)



الدالة متزايدة في $\{x: x > -1\}$

الدالة متزايدة في $\{x: x < -1\}$

نقطة حرجة فقط (-1,-1)

3) **نقاط الانقلاب**

$$f''(x) = 6(x+1)(1)$$

$$6(x-1) = 0 \quad \div 6$$

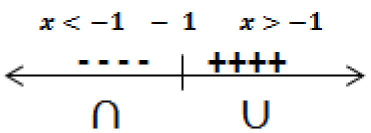
$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$f(-1) = (-1+1)^3 - 1$$

$$= 0 - 1 = -1$$

(-1,-1)

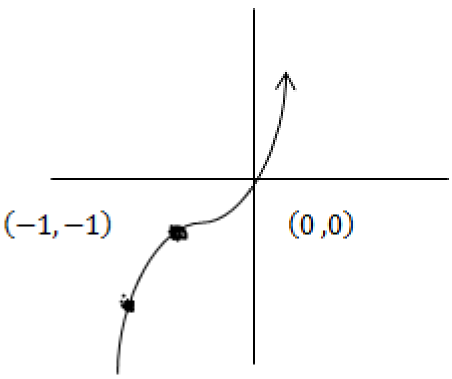


اشارة $f''(x)$

الدالة محدبة في $\{x: x < -1\}$

الدالة مقعرة في $\{x: x > -1\}$

نقطة انقلاب (-1,-1)



مثال// ارسم منحني الدالة $f(x) = 4 - 6x - x^2$

1) نقاط التقاطع

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4 - 6(0) - (0)^2 = 4$$

(0, 4) نقطة تقاطع

$$y = 0 \Rightarrow 4 - 6x - x^2 = 0$$

ليس بالضرورة

2) النهايات

$$f'(x) = -6 - 2x$$

$$-6 - 2x = 0 \quad \div -2$$

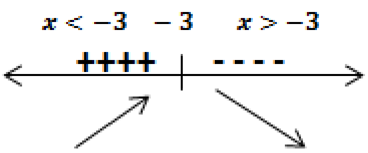
$$3 + x = 0$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = 4 - 6(-3) - (-3)^2$$

$$= 4 + 18 - 9 = 13$$

(-3, 13) نقطة حرجة



اشارة $f'(x)$

الدالة متناقصة في $\{x: x > -3\}$

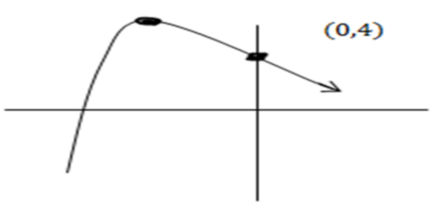
الدالة متزايدة في $\{x: x < -3\}$

(-3, 13) نقطة عظمى محلية

3) نقاط الانقلاب

$f''(x) = -2$

الدالة محدبة في مجال ولا توجد نقاط انقلاب



واجب

ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

التطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

نتعرف على السؤال من خلال وجود كلمة (اكبر ما يمكن او اصغر ما يمكن)

اولا: الاعداد

خطوات الحل :

1- افرض الاعداد
2- جد علاقة تقلل عدد المتغيرات
3- اكتب علاقة m وحسب ما موجود قرب كلمة (اكبر ما يمكن او اصغر ما يمكن)
4- اشتق المعادلة ثم اجعلها تساوي صفر
5- حل المعادلة تحصل على المجهول الاول
6- عوض بالعلاقة تحصل على المجهول الثاني

ملاحظات:

1- حاصل ضربهما $m = xy$
2- مجموع مربعيهما $m = x^2 + y^2$
3- حاصل ضرب احدهما في مربع الاخر $m = x^2y$
4- حاصل ضرب مربع احدهما في مربع الاخر $m = x^2y^2$
5- حاصل ضرب مربع احدهما في مكعب الاخر $m = x^3y^2$

مثال/ جد عددين مجموعهما يساوي 20 وحاصل ضربهما اكبر ما يمكن .

الحل//

نفرض العدد الاول =x

نفرض العدد الثاني =y

$$x + y = 20$$

$$y = 20 - x \qquad \text{علاقة}$$

$$m = xy$$

$$m = x(20 - x)$$

$$m = 20x - x^2$$

$$m' = 20 - 2x$$

$$20 - 2x = 0 \qquad \div 2$$

$$10 - x = 0 \Longrightarrow x = 10 \qquad \text{العدد الاول}$$

$$y = 20 - 10$$

$$y = 10 \qquad \text{العدد الثاني}$$

مثال/ جد عددين مجموعهما يساوي 20 ومجموع مربعيهما اصغر ما يمكن .

الحل//

نفرض العدد الاول =x

نفرض العدد الثاني =y

$$x + y = 20$$

$$y = 20 - x \qquad \text{علاقة}$$

$$m = x^2 + y^2$$

$$m = x^2 + (20 - x)^2$$

$$m = x^2 + 400 - 40x + x^2$$

$$m = 2x^2 - 40x + 400$$

$$m' = 4x - 40$$

$$4x - 40 = 0 \qquad \div 4$$

$$x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 10 \qquad \text{العدد الاول}$$

$$y = 20 - 10$$

$$y = 10 \qquad \text{العدد الثاني}$$

مثال/ جد عددين مجموعهما يساوي 15 وحاصل ضرب احدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن

الحل// نفرض العدد الاول =x

نفرض العدد الثاني =y

$$x + y = 15$$

$$y = 15 - x$$ علاقة

$$m = x^2 y$$

$$m = x^2(15 - x)$$

$$m = 15x^2 - x^3$$

$$m' = 30x - 3x^2$$

$$30x - 3x^2 = 0 \qquad \div 3$$

$$10x - x^2 = 0$$

$$x(10 - x) = 0$$

اما $x = 0$ يهمل

او $10 - x = 0 \Rightarrow x = 10$ العدد الاول

$$y = 15 - 10$$

$y = 5$ العدد الثاني

واجب

مثال/ جد عددين مجموعهما يساوي75وحاصل ضرب احدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن

مثال/ جد عددين مجموعهما يساوي10وحاصل ضرب مربع احدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن

الحل//

نفرض العدد الاول =x

نفرض العدد الثاني =y

$$x + y = 10$$

$$y = 10 - x \quad \text{علاقة}$$

$$m = x^2y^2$$

$$m = x^2(10 - x)^2$$

$$m = x^2[2(10 - x)(-1)] + (10 - x)^2 2x$$

$$-2x^2(10 - x) + 2x(10 - x)^2 = 0 \qquad \div 2$$

$$-x^2(10 - x) + x(10 - x)^2 = 0$$

$$x(10 - x)[-x + 10 - x\,] = 0$$

اما $x = 0$ يهمل/

او $10 - x = 0 \Rightarrow x = 10$ يهمل

او $-x + 10 - x = 0$

$10 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$ العدد الاول

$$y = 10 - 5$$

$y = 5$ العدد الثاني

مثال/ جد عددين مجموعهما يساوي 15 وحاصل ضرب مربع احدهما في مكعب الاخر اكبر ما يمكن

الحل//

نفرض العدد الاول $=x$

نفرض العدد الثاني $=y$

$$x + y = 15$$

$$y = 15 - x \quad \text{علاقة}$$

$$m = x^3 y^2$$

$$m = x^3 (10 - x)^2$$

$$m = x^3[2(15 - x)(-1)] + (15 - x)^2(3x^2)$$

$$-2x^3(15 - x) + 3x^2(15 - x)^2 = 0 \qquad \div -2x$$

$$x^2(15 - x)[-2x + 3(15 - x)] = 0$$

اما $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ يهمل

او $15 - x = 0 \Rightarrow x = 15$ يهمل

او $-2x + 3(15 - x) = 0$

$$-2x + 45 - 3x = 0$$

$$45 - 5x = 0 \qquad \div 5$$

$9 - x = 0 \Rightarrow x = 9$ العدد الاول

$$y = 15 - 9$$

$y = 6$ العدد الثاني

مثال /جد العدد الذي زيادته على مربعه اكبر ما يمكن

الحل//   نفرض العدد = x

مربعه = x^2

$$m = x - x^2$$

$$m' = 1 - 2x$$

$$1 - 2x = 0 \Longrightarrow 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

مثال/ جد العدد الذي زيادة ثلاثة امثال مربعه على مكعبه اكبر ما يمكن

الحل// نفرض العدد = x

ثلاثة امثال مربعه = $3x^2$

مكعبه = x^3

$$m = 3x^2 - x^3$$

$$m' = 6x - 3x^2$$

$$6x - 3x^2 = 0 \qquad \div 3$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

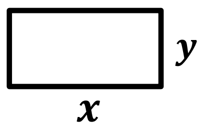
اما $x = 0$ يهمل

او $2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$

ثانيا: المساحات والحجوم .

1- ارسم الشكل يوضح السؤال
2- افرض المتغيرات
3- جد علاقة تقلل عدد المتغيرات
4- اكتب القانون مثل المساحة او المحيط او الحجم ......
5- اشتق القانون ثم اجعله يساوي صفر
6- حل المعادلة الناتجة .

مثال/ جد ابعاد اكبر مستطيل محيطه 40 متر .



نفرض الابعاد x,y

$$P = 2(x + y)$$

$$40 = 2(x + y) \qquad \div 2$$

علاقة $20 = x + y \Rightarrow y = 20 - x$

$$A = xy$$

$$A = x(20 - x)$$

$$A = 20x - x^2$$

$$A' = 20 - 2x$$

$$20 - 2x = 0 \qquad \div 2$$

$$10 - x = 0 \Rightarrow x = 10$$

$$y = 20 - 10 = 10$$

مثال/ جد اقل محيط لمستطيل مساحته $100cm^2$

الحل/

نفرض الابعاد x , y

$$A = xy$$

$$100 = xy \Rightarrow y = \frac{100}{x}$$ علاقة



$$P = 2(x + y)$$

$$P = 2x + 2y$$

$$P = 2x + \frac{200}{x}$$

$$P = 2x + 200x^{-1}$$

$$P' = 2 - 200x^{-2}$$

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \qquad \div 2$$

$$1 - \frac{100}{x^2} = 0 \qquad \times x^2$$

$$x^2 - 100 = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

$$y = \frac{100}{10} = 10$$

$$P = 2(10 + 10)$$

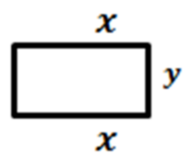
$$P = 2(20)$$

$$P = 40$$

مثال/ قطعت ارض مستطيلة الشكل يحدها نهر من احدى جهاتها جد اكبر مساحة من الارض يمكن تسييجها بسياج طولة 100 متر

الحل/

نفرض الابعاد x,y



$$100 = 2x + y$$

$$y = 100 - 2x \quad \text{علاقة}$$

$$A = xy$$

$$A = x(100 - 2x)$$

$$A = 100x - 2x^2$$

$$A' = 100 - 4x$$

$$100 - 4x = 0 \qquad \div 4$$

$$25 - x = 0$$

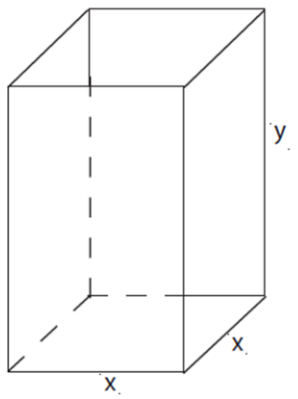
$$x = 25$$

$$y = 100 - 50 = 50$$

$$A = (25)(50)$$

$$A = 1250$$

مثال/ يراد صنع حوض على شكل متوازي المستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة الشكل وحجمه $864m^3$ اوجد اقل مساحة من الالواح يمكن ان نستخدمه في صنعه .



الحل//

نعوض طول ضلع القاعدة = x

نعوض الارتفاع = y

الارتفاع × مساحة القاعدة = الحجم

$$V = x^2y$$

$$864 = x^2y \Rightarrow y = \frac{864}{x^2}$$ علاقة

مساحة القاعدة + الارتفاع × محيط القاعدة = المساحة الكلية

$$A = 4xy + x^2$$

$$A = 4x(\frac{864}{x^2}) + x^2$$

$$A = \frac{4(864)}{x} + x^2$$

$$A = 4(864)x^{-1} + x^2$$

$$A' = -4(864)x^{-2} + 2x$$

$$\frac{-4(864)}{x^2} + 2x = 0 \qquad \div 2$$

$$\frac{-2(864)}{x^2} + x = 0 \qquad \times x^2$$

$$-1728 + x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 1728 \rightarrow x = 12m$$

$$y = \frac{864}{(12)^2} = \frac{864}{144} = 6m$$

$$A = 4(12)(6) + (12)^2$$

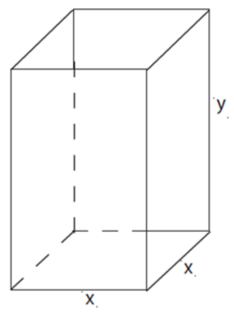
$$A = 432m^2$$

مثال/في ورشة للتجارة يراد صنع صندوق من الخشب على شكل متوازي السطوح المستطيلة قاعدته مربعة الشكل وبدون غطاء . جد ابعاد الصندوق لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علما ان مجموع محيط القاعدة وارتفاعه $90m$.

الحل//

نفرض طول ضلع القاعدة = x

نفرض الارتفاع = y



علاقة $\quad 4x + y = 90 \Longrightarrow y = 90 - 4x$

$$V = x^2 y$$

$$V = x^2(90 - 4x)$$

$$V = 90x^2 - 4x^3$$

$$V' = 180x - 12x^2$$

$$180x - 12x^2 = 0 \qquad \div 12$$

$$15x - x^2 = 0$$

$$x(15 - x) = 0$$

يهمل $x = 0$ اما

او $15 - x = 0 \Longrightarrow x = 15m$

$$y = 90 - 4(15)$$

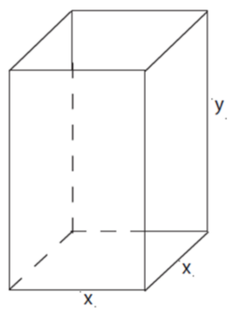
$$y = 90 - 60$$

$$y = 30\text{m}$$

مثال/ حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعه وحجمه $108m^3$ جد ابعاده بحيث تكون مساحة الالواح المستخدم في صنعه اقل ما يمكن .

الحل// نفرض طول ضلع القاعدة $= x$

نفرض الارتفاع $= y$



$$V = x^2 y$$

$$108 = x^2 y \Rightarrow y = \frac{108}{x^2}$$

$$A = 4xy + x^2$$

$$A = 4x(\frac{108}{x^2}) + x^2$$

$$A = \frac{4(108)}{x} + x^2$$

$$A = 4(108)x^{-1} + x^2$$

$$A' = -4(108)x^{-2} + 2x$$

$$\frac{-4(108)}{x^2} + 2x = 0 \qquad \div 2$$

$$\frac{-216}{x^2} + x = 0 \qquad \times x^2$$

$$-216 + x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6m$$

$$y = \frac{108}{36} = 3m$$

امثله واجب

1- اطلقت رصاصه الى الاعلى وكان ارتفاعها m متر في نهاية t من الثواني بحيث $m = 224t - 16t^2$ احسب اقصى ارتفاع تصل اليه الرصاصة ؟

2- نافذه على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة بحيث ينطبق قطرها على احد ابعاد المستطيل فاذا كان محيط المستطيل 8m جد ابعاد المستطيل لكي تكون مساحة النافذة اكبر ما يمكن .

3- من مستطيل محيطه 120m قطعت منطقة على شكل نصف دائرة ينطبق قطرها على احد الضلعين الصغيرين للمستطيل ما ابعاد ذلك المستطيل لكي تكون المساحة المتبقية بعد القطع اكبر ما يمكن .

4- جد اقل محيط ممكن لمستطيل مساحته $16cm^2$

5- جد ابعاد اكبر مستطيل محيطه 24 .

التكامل

-: هو عملية عكس التفاضل رمزه $\int f(x)dx$

ملاحظات قبل اجراء التكامل :

1 – تخلص من الاقواس ان وجدت

2 – تخلص من الجذور اينما وجدت وذلك بتحويلها الى اس كسري

3 – تخلص من الكسور ان وجدت(حل واختصر المقام او ارفع المقام الى البسط مع تغير اشارة الاس)

ملاحظة بعد اجراء التكامل . عند اجراء التكامل احذف رمز التكامل ودليل التكامل

التكامل غير المحدد

القاعدة الاولى : تكامل الثابت

اضرب الثابت في المتغير الموجود في دليل التكامل $\int adx = ax + c$

مثال / جد التكاملات الاتية

1 - $\int 4dx = 4x + c$

2 - $\int 5dx = 5x + c$

3 - $\int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x + c$

4 - $\int \sqrt{7}dx = \sqrt{7}x + c$

5 - $\int \sqrt{z^2 + 3z + 1}dx = \left(\sqrt{z^2 + 3z + 1}\right)x + c$

القاعدة الثانية : $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$

تكامل حد مرفوع الى اس يضاف الى الاس واحد ونقسم على الاس الجديد

مثال / جد التكاملات الاتية

1 - $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

2 - $\int 4x^2 dx = \frac{4x^3}{3} + c$

3 - $\int 5x^4 dx = \frac{5x^5}{5} + c = x^5 + c$

4 - $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

5 - $\int 2x^7 dx = \frac{2x^8}{8} + c = \frac{x^8}{4} + c$

6 - $\int 2x dx = \frac{2x^2}{2} + c = x^2 + c$

7 - $\int -3x dx = -\frac{3x^2}{2} + c$

8 - $\int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$

9 - $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$

10 - $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

11 - $\int x^{\frac{-2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3} x^{\frac{3}{5}} + c$

12 - $\int (3x^2 + 2x - 4) dx$

$= \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 4x + c$

$= x^3 + x^2 - 4x + c$

13 - $\int (x^2 - 9x + 1) dx$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + x + c$

14 - $\int (x^4 - 3x^2 + 5) dx$

$= \frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + 5x + c$

$= \frac{x^5}{5} - x^3 + 5x + c$

15 - $\int \sqrt{x}dx$

$= \int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

16 - $\int x(3x-2)dx$

$= \int (3x^2 - 2x)dx$

$= \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + c$

$= x^3 - x^2 + c$

17 - $\int \frac{x^4-8x}{x-2}dx$

$= \int \frac{x(x^3-8)}{x-2}dx$

$= \int \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}dx$

$= \int x(x^2 + 2x + 4)dx$

$= \int (x^3 + 2x^2 + 4x)dx$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + c$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + c$

18 $-$ $\int (x^2+1)(2x-3)dx$

$= \int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 3)dx$

$= \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3x + c$

$= \frac{x^4}{2} - x^3 + x^2 - 3x + c$

19 - $\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{[(3x^2-4)-4][(3x^2-4)+4]}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{(3x^2-8)3x^2}{x^2}\,dx$

$= \int (9x^2 - 24)\,dx$

$= \frac{9x^3}{3} - 24x + c$

$= 3x^3 - 24x + c$

20 - $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$

$= \int \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x + c$

$= 2x^3 - 2x^2 + 3x + c$

21 - $\int (3x-1)(x+5)\,dx$

$= \int (3x^2 + 14x - 5)\,dx$

$= \frac{3x^3}{3} + \frac{14x^2}{2} - 5x + c$

$= x^3 + 7x^2 - 5x + c$

22 - $\int \frac{x^3+27}{x+3}\,dx$

$= \int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}\,dx$

$= \int (x^2 - 3x + 9)\,dx$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x + c$

23 - $\int \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int \left(3x^2 - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx$

$= \int \left(3x^2 - x^{\frac{-1}{2}}\right)dx$

$= \frac{3x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x^3 - 2x^{\frac{1}{2}} + c$

24 - $\int \frac{(x^4-16)}{x+2}dx$

$= \int \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{x+2}dx$

$= \int \frac{(x^2+4)(x-2)(x+2)}{x+2}dx$

$= \int (x^3 - 2x^2 + 4x - 8)dx$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 8x + c$

$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 8x + c$

25 - $\int x(\sqrt{x^3} + 4)dx$

$= \int x\left(x^{\frac{3}{2}} + 4\right)dx$

$= \int \left(x^{\frac{5}{2}} + 4x\right)dx$

$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^2 + c$

26 - $\int \frac{x^4-1}{x-1}dx$

$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}dx$

$= \int \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}dx$

$= \int (x^3 + x^2 + x + 1)dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$

27 - $\int \sqrt{x}(\sqrt{x} + 5)dx$

$= \int (x + 5\sqrt{x})dx$

$= \int \left(x + 5x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

القاعدة الثالثة : تكامل قوس (دالة) مرفوعة الى اس

$$\int [f(x)]^n . f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

تقسم الى ثلاث حالات :

الحالة الاولى :- اذا كانت مشتقة داخل القوس هي نفسها خارج القوس نطبق القاعدة مباشرة .

1 - $\int (2x^2+3x+1)^5(4x+3)dx$

$= \frac{(2x^2+3x+1)^6}{6} + c$

2 - $\int (x^2+3)^2(2x)dx$

$= \frac{(x^2+3)^3}{3} + c$

3 - $\int \sqrt{x^2+3x+2}\,(2x+3)dx$

$= \int (x^2+3x+2)^{\frac{1}{2}}(2x+3)dx$

$= \frac{2}{3}(x^2+3x+2)^{\frac{3}{2}} + c$

4 - $\int \frac{3dx}{(3x-1)^4}$

$= \int (3x-1)^{-4}3dx$

$= \frac{(3x-1)^{-3}}{-3} + c$

$= -\frac{1}{3(3x-1)^3} + c$

الحالة الثانية :- اذا كانت مشتقة داخل القوس تختلف عن خارج القوس بعدد نطبق القاعدة مع ضرب الناتج بمقلوب ذلك العدد .

1 - $\int (3x^2+8x+7)^8(3x+4)dx$

$= \frac{1}{2} . \frac{(3x^2+8x+7)^9}{9} + c$

$= \frac{1}{18}(3x^2+8x+7)^9 + c$

2 - $\int (x^2-2x+1)^7(x-1)dx$

$= \frac{1}{2} . \frac{(x^2-2x+1)^8}{8} + c$

$= \frac{1}{16}(x^2-2x+1)^8 + c$

3 - $\int (x^3+7)^5 x^2 dx$

$$= \frac{1}{3}\frac{(x^3+7)^6}{6} + c = \frac{1}{18}\ (x^3+7)^6 + c$$

4 - $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2} dx$

$$= \int (x^2-4+5)^{-2}(x-2)dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{2(x^2-4x+5)} + c$$

5 - $\int \frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}} dx$

$$= \int (x^3+6x+1)^{\frac{-1}{3}}(x^2+2)dx$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{3}{2}\ (x^3+6x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^3+6x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

6 - $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}} dx$

$$= \int (5-x^4)^{-\frac{1}{5}} x^3 dx$$

$$= -\frac{1}{4}.\frac{5}{4}\ (5-x^4)^{\frac{4}{5}} + c$$

$$= -\frac{5}{16}\ (5-x^4)^{\frac{4}{5}} + c$$

7 - $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} dx$

$$= \int (x^3+3x+1)^{-\frac{1}{3}}(x^2+1)dx$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{3}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

الحالة الثالثة :- اذا كانت مشتقة داخل القوس غير موجودة يوجد احتمالين

أ – اذا كانت الدالة داخل القوس تتكون من حدين استخرج عامل مشترك ثم وزع الاسس ومن ثم تأكد من مشتقة داخل القوس.

1 - $\int \sqrt[3]{x^5 - 2x^3}dx$

$= \int \sqrt[3]{x^3(x^2 - 2)}dx$

$= \int x \sqrt[3]{(x^2 - 2)}dx$

$= \int (x^2 - 2)^{\frac{1}{3}} x dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (x^2 - 2)^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{8} (x^2 - 2)^{\frac{4}{3}} + c$

2 - $\int \sqrt{x^4 - 3x^2}dx$

$= \int \sqrt{x^2(x^2 - 3)}dx$

$= \int x\sqrt{(x^2 - 3)}dx$

$= \int (x^2 - 3)^{\frac{1}{2}} x dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 - 3)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{1}{3} (x^2 - 3)^{\frac{3}{2}} + c$

3 - $\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}dx$

$= \int \sqrt[3]{x^3(3 - 5x^2)}dx$

$= \int \ x\sqrt[3]{(3 - 5x^2)}dx$

$= \int (3 - 5x^2)^{\frac{1}{3}} x dx$

$= -\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{4} (3 - 5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$

$= -\frac{3}{40} (3 - 5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$

4 - $\int \sqrt[3]{2x^5 - 7x^3}\,dx$

$= \int \sqrt[3]{x^3(2x^2 - 7)}\,dx$

$= \int x\,\sqrt[3]{(2x^2 - 7)}\,dx$

$= \int (2x^2 - 7)^{\frac{1}{3}}x\,dx$

$= \frac{1}{4}.\frac{3}{4}(2x^2 - 7)^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{16}(2x^2 - 7)^{\frac{4}{3}} + c$

ب – اذا كانت الدالة داخل القوس تتكون من ثلاث حدود اعمل ما يأتي

1 – حلل الى مربع كامل

2- اضرب الاسس

3- تأكد من مشتقة داخل القوس

4- طبق القاعدة

1 - $\int \frac{dx}{4x^2-12x+9}$

$= \int \frac{dx}{((2x-3)^2)^1}$

$= \int \frac{dx}{(2x-3)^2}$

$= \int (2x - 3)^{-2}dx$

$= \frac{\frac{1}{2}.(2x-3)^{-1}}{-1} + c$

$= -\frac{1}{2(2x-3)} + c$

2 - $\int \frac{dx}{(x^2+8x+16)^3}$

$= \int \frac{dx}{((x+4)^2)^3}$

$= \int \frac{dx}{(x+4)^6}$

$= \int (x + 4)^{-6}dx$

$= \frac{(x+4)^{-5}}{-5} + c$

$= -\frac{1}{(x+4)^5} + c$

3 - $\int \sqrt{x^2-10x+25}dx$

$= \int (x^2-10x+25)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \int ((x-5)^2)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \int (x-5)dx$

$= \frac{(x-5)^2}{2}+c$

4 - $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2-14x+49}}$

$= \int ((x-7)^2)^{-\frac{1}{5}}dx$

$= \int (x-7)^{-\frac{2}{5}}dx$

$= \frac{5}{3}(x-7)^{\frac{3}{5}}+c$

واجبات :

1 - $\int \left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-1\right)dx$

2 - $\int \frac{\sqrt[3]{x^3}+2}{\sqrt[3]{x}}dx$

3 - $\int \sqrt[5]{(1-3x)^2}dx$

4 - $\int \frac{x^3-2x^2+1}{5x^5}dx$

5 - $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+16x+64}}$

** التطبيقات على التكامل غير المحدد **

اولا :- ايجاد معادلة المنحني

1 – اكتب $y = \int (\text{الميل المعطى})\, dx$ واجري عملية التكامل

2 - عوض قيم x و y في ناتج التكامل لتحصل على قيمة c

3 – اكتب المعادلة

مثال : اذا كان ميل المنحني عند كل نقطة من نقاطه (x ,y) هو $(3x^2 - 2x + 1)$ جد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة (2, 3)

الحل :

$$y = \int (3x^2 - 2x + 1)dx$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + c$$

$$y = x^3 - x^2 + x + c$$

(2, 3) تحقق المعادلة

$$3 = (2)^3 - (2)^2 + 2 + c$$

$$\Rightarrow 3 = 8 - 4 + 2 + c$$

$$\Rightarrow 3 = 6 + c$$

$$\Rightarrow c = 3 - 6$$

$$\Rightarrow c = -3$$

$\therefore y = x^3 - x^2 + x - 3$ منحني المعادلة

مثال: منحني ميله عند اية نقطة (x , y) يساوي $x\sqrt{x^2+9}$ جد معادلته اذا كان يمر بالنقطة (0 ,7)

الحل :

$$y = \int x\sqrt{x^2+9}dx$$
$$\Rightarrow y = \int (x^2+9)^{\frac{1}{2}}xdx$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + c$$
$$y = \frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + c$$

(0 ,7) تحقق المعادلة

$$7 = \frac{1}{3}(0+9)^{\frac{3}{2}} + c$$
$$\Rightarrow 7 = 9 + c$$
$$\Rightarrow c = -2$$
$$\therefore y = \frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} - 2$$

مثال : جد معادلة المنحني الذي ميله عند *(x , y)* يساوي $\frac{-2}{x^3}$ وكان يمر بالنقطة *(1 ,3)*

الحل

$$y = \int -\frac{2}{x^3}dx$$
$$\Rightarrow y = \int -2x^{-3}dx$$
$$\Rightarrow y = -\frac{2x^{-2}}{-2} + c$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2} + c$$

(1 ,3) تحقق المعادلة

$$3 = 1 + c$$
$$\Rightarrow c = 3 - 1$$
$$\Rightarrow c = 2$$
$$\therefore y = \frac{1}{x^2} + 2$$

مثال / جد معادلة المنحني الذي ميله عند اي نقطة من نقاطه هو 2x-4 وكان للمنحني نهاية عظمى قيمتها (-3) .

الحل :

ملاحظة :- يجب ايجاد النقطة اولا وحسب الخطوات الاتية

1 – اجعل الميل لمعطى = صفر

2 – حل المعادلة تحصل على قيم x

3 – اختبر النقاط على خط الاعداد

$$2x - 4 = 0$$
$$\Rightarrow 2x = 4$$
$$\Rightarrow x = 2$$

النقطة (2 ,-3)

$$y = \int (2x - 4)dx$$
$$\Rightarrow y = x^2 - 4x + c$$

(2 ,-3) تحقق المعادلة

$$-3 = (2)^2 - 4(2) + c$$
$$\Rightarrow -3 = 4 - 8 + c$$
$$\Rightarrow -3 = -4 + c$$
$$\Rightarrow c = 1$$
$$\therefore y = x^2 - 4x + 1$$

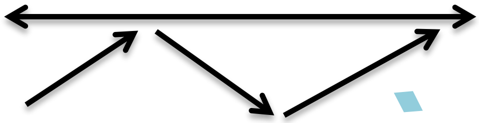
مثال / جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x ,y) من نقاطه هو $3x^2 - 6x - 9$ وكان للمنحني نهاية عظمى قيمتها (10)

الحل :

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

اما $x = -1$ او $x = 3$

++++++(-1) --------- (3)++++++++++



النقطة هي (-1 ,10) نهاية عظمى

$$y = \int (3x^2 - 6x - 9)dx$$
$$\Rightarrow y = x^3 - 3x^2 - 9x + c$$

(-1 ,10) تحقق المعادلة

$$10 = -1 - 3 + 9 + c$$
$$\Rightarrow 10 = 5 + c$$
$$\Rightarrow c = 5$$
$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

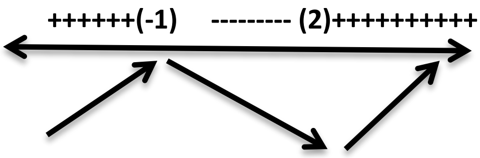
مثال / جد معادلة المنحني الذي ميله $(x^2 - x - 2)$ وكان للمنحني نهاية عظمى لمحور السينات

الحل : بما ان للمنحني نهاية عظمى لمحور السينات y =0

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 2 \text{ او } x = -1$$



النقطة (-1 ,0)

$$y = \int (x^2 - x - 2)dx$$

$$\Longrightarrow y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

$$0 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + c$$

$$\Longrightarrow 0 = \frac{-2-3+12}{6} + c$$

$$\Longrightarrow 0 = \frac{7}{6} + c$$

$$\Longrightarrow c = -\frac{7}{6}$$

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{7}{6}$$

مثال / اذا كان ميل منحني عند (x ,y) هو $ax - 3x^2$ وكان المستقيم 9x-y-4=0 مماساً عند (1 ,5) . جد معادلته

الحل / يجب ايجاد قيمة a

الميل = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$, $\frac{-9}{-1} = 9$

$\therefore ax - 3x^2 = 9$

$\Rightarrow a(1) - 3(1) = 9$

$\Rightarrow a = 9 + 3$

$\Rightarrow a = 12$

$y = \int (12x - 3x^2)dx$

$\Rightarrow y = 6x^2 - x^3 + c$

(1 ,5) تحقق المعادلة

$5 = 6(1)^2 - (1)^3 + c$

$\Rightarrow 5 = 6 - 1 + c$

$\Rightarrow c = 0$

$y = 6x^2 - x^3$

مثال / جد معادلة المنحني الذي ميله عند اي نقطة هو ax^2-6x-9 وللمنحني نقطة انقلاب (1,-6)

الحل :

$y' = ax^2 - 6x - 9$

$\Rightarrow y'' = 2ax - 6$

$\Rightarrow 2ax - 6 = 0$

$\Rightarrow ax - 3 = 0$

$\Rightarrow ax = 3$

$\Rightarrow a(1) = 3$

$\Rightarrow a = 3$

$y = \int (3x^2 - 6x - 9)dx$

$\Rightarrow y = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

(1 , -6) تحقق المعادلة

$-6 = 1 - 3 - 9 + c$

$\Rightarrow -6 = -11 + c$

$\Rightarrow c = 5$

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

امثلة واجب :

1 – منحني يمر بالنقطتين (9, 1-) , (3-, 2) وميله عند (x ,y) يساوي ax-5 جد معادلته

2 – جد الدالة التي تحقق $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 2$ و $\frac{dy}{dx} = 5$ عند النقطة (1 ,2)

3 – جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية تساوي 6x-2 وكان ميله عند النقطة (2 ,5) يساوي 1-

4 – جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية 6x والذي يمر بالنقطتين (1 ,6) , (-1 ,6)

التطبيقات الاقتصادية على التكامل

1 - $M = \int \acute{m} dv$ حيث ان $\acute{m}$ هي دالة الايراد الحدي و Mدالة الايراد الكلي

2 - $T = \int \acute{T} dv$ حيث $\acute{T}$ هي دالة الكلفة الحدية وT دالة الكلفة الكلية

ملاحظة :-

1 – v حجم الانتاج

2 – ما ينتج يباع $\Leftarrow$ v=0

3 – دالة السعر (دالة الطلب) = $\frac{M}{\text{الكمية المباعة}}$

مثال / اذا كانت دالة الايراد الحدي هي $\acute{M} = 8 - 6v - 2v^2$ حيث v حجم الانتاج جد دالة الايراد الكلي ودالة السعر.

الحل :

$$M = \int (8 - 6v - 2v^2) dv$$

$$= 8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3 + c$$

عندما يكون حجم الانتاج $v = 0$, $M = 0$ فان $c = 0$ لذا فان (ما ينتج يباع)

دالة الايراد الكلي هي $M = 8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3$

دالة السعر = $\frac{M}{\text{الكمية المباعة}}$

دالة السعر $\frac{8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3}{v} = 8 - 3v - \frac{2}{3}v^2$

مثال / اذا كانت دالة الايراد الحدي هي $\acute{M} = 12 - 8v - v^2$ جد دالة الايراد الحدي ودالة الطلب (السعر) بفرض ما ينتج يباع ؟

الحل :

$$M = \int (12 - 8v - v^2)dv \Rightarrow M = 12v - 4v^2 - \frac{v^3}{3} + c$$

بما ان ما ينتج يباع v=0 , M=0 فان C=0

دالة الايراد الكلي هي $M = 12v - 4v^2 - \frac{v^3}{3}$

دالة السعر = $\frac{M}{\text{الكمية المباعة}}$

$$\frac{12v - 4v^2 - \frac{v^3}{3}}{v} = 12 - 4v - \frac{v^2}{3}$$

مثال / اذا كانت دالة التكلفة الحدية $\acute{T}$ هي $\acute{T} = 2 + 60v - 5v^2$ حيث v حجم الانتاج جد دالة التكلفة الكلية . علما ان *T=65*

الحل :

$$T = \int (2 + 60v - 5v^2)dv$$

$$T = 2v + 30v^2 - \frac{5}{3}v^3 + c$$

بما ان v = 0 , T= 65 فان C=65

دالة التكلفة الكلية هي $T = 2v + 30v^2 - \frac{5}{3}v^3 + 65$

مثال / اذا كانت دالة التكلفة الحدية هي $\acute{T} = 1000 - 5v$ حيث v حجم الانتاج فأوجد دالة التكلفة الكلية مع العلم ان التكلفة الثابتة = 150

الحل :

$$T = \int (1000 - 5v)dv$$

$$T = 1000v - \frac{5}{2}v^2 + c$$

بما ان v=0 ، T=150 فان C=150

دالة التكلفة الكلية هي $T = 1000v - \frac{5}{2}v^2 + 150$

التكامل المحدد

رمزه $\int_a^b f(x)dx$ بحيث ان قواعد التكامل المحدد هي نفسها قواعد التكامل غير المحدد لكن بدون C .

1 – $\int_1^2 (3x^2 + 2x - 2)dx$

$$= \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 2x\right]_1^2$$

$$= [x^3 + x^2 - 2x]_1^2$$

$$= [8 + 4 - 4] - (1 + 1 - 2) = 8$$

$$2 - \int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}\, dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 + 16)^{\frac{-1}{2}} 2x dx$$

$$= \left[\frac{(x^2+16)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3$$

$$= \left[2\sqrt{x^2 + 16}\right]_0^3$$

$$= \left[2\sqrt{9 + 16}\right] - \left[2\sqrt{0 + 16}\right] = 2$$

$$3 - \int_1^{125} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$$

$$= \int_1^{125} \left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-2}{3}} dx$$

$$= \left[3 . \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^{125}$$

$$= \left[3 . \frac{2}{3} \sqrt{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3}\right]_1^{125}$$

$$= \left[2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3}\right]_1^{12\ 5}$$

$$= \left[2\sqrt{\left(\sqrt[3]{125} - 1\right)^3}\right] - \left[2\sqrt{\left(\sqrt[3]{1} - 1\right)^3}\right]$$

$$= 16 - 0 = 16$$

$4 - \int_{-1}^{1}(x^2+3)(x-2)dx$

$$= \int_{-1}^{1}(x^3 - 2x^2 + 3x - 6)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - dx\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 6\right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 6\right]$$

$$= \left[-\frac{2}{3} - 6\right] - \left[\frac{2}{3} + 6\right]$$

$$= \left[\frac{-2-18}{3}\right] - \left[\frac{2+18}{3}\right] = \frac{-40}{3}$$

$5 - \int_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$= \int_{0}^{1}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}xdx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\sqrt{1+1}\right] - \left[\sqrt{0}+1\right]$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$6-\int_{-1}^{0}\frac{x^3-27}{x-3}dx$

$=\int_{-1}^{0}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2+3x+9)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+9x\right]_{-1}^{0}$

$=[0]-\left[\frac{-1}{3}+\frac{3}{2}-9\right]$

$=-\left[\frac{-2+9-54}{6}\right]$

$=-\left[\frac{47}{6}\right]=\frac{47}{6}$

$7-\int_{-6}^{-5}\sqrt[3]{x^2+12x+36}dx$

$=\int_{-6}^{-5}(x^2+12x+36)^{\frac{1}{3}}dx$

$=\int_{-6}^{-5}((x+6)^2)^{\frac{1}{3}}dx$

$=\int_{-6}^{-5}(x+6)^{\frac{2}{3}}dx$

$=\left[\frac{(x+6)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_{-6}^{-5}$

$=\left[\frac{3}{5}(x+6)^{\frac{5}{3}}\right]_{-6}^{-5}$

$=\left[\frac{3}{5}(-5+6)^{\frac{5}{3}}\right]-\left[\frac{3}{5}(-6+6)^{\frac{5}{3}}\right]$

$=\left[\frac{3}{5}\right]-[0]=\frac{3}{5}$

8 − $\int_{-1}^{1} \sqrt[5]{3x^5 - 2x^7}\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt[5]{x^5(3 - 2x^2)}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (3 - 2x^2)^{\frac{1}{5}} x\,dx$$

$$= \frac{-1}{4}\left[\frac{(3-2x^2)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-5}{24}[3 - 2x^2]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-5}{24}([3 - 2] - [3 - 2]) = -\frac{5}{24}\,.(0) = 0$$

9 − $\int_{0}^{3} \sqrt[3]{(3x - 1)^2}\,dx$

$$= \int_{0}^{3} ((3x - 1)^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \int_{0}^{3} (3x - 1)^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(3x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_{0}^{3}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{3}{5}\left[(3x - 1)^{\frac{5}{3}}\right]_{0}^{3}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\left[(9 - 1)^{\frac{5}{3}}\right] - \left[(0 - 1)^{\frac{5}{3}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{5}(32 + 1) = \frac{33}{5}$$

10 − $\int_0^8 \sqrt{x^2 - 14x + 49}\,dx$

$= \int_0^8 \sqrt{(x-7)^2}\,dx$

$= \int_0^7 (7-x)dx + \int_7^8 (x-7)dx$

$= \left[7x - \frac{x^2}{2}\right]_0^7 + \left[\frac{x^2}{2} - 7x\right]_7^8$

$= \left[\left(49 - \frac{49}{2}\right) - (0)\right] + \left[(32-56) - \left(\frac{49}{2} - 49\right)\right] = 25$

11 − $\int_0^4 \sqrt{x}(x+1)^2 dx$

$= \int_0^4 \sqrt{x}(x^2 + 2x + 1)dx$

$= \int_0^4 \left(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right) dx$

$= \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$= \left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$= \frac{256}{7} + \frac{128}{5} + \frac{16}{3}$

ملاحظة : اذا كان الحد الادنى اكبر من الحد الاعلى اضرب التكامل ب (-) وغير حدود التكامل من الادنى الى الاعلى وبالعكس .

$12-\int_4^0 x(x-1)(x-2)dx$

$=-\int_0^4 (x^3-3x^2+2x)dx$

$=-\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^4$

$=-([64-64+16]-[0])=-6$

ايجاد الثوابت باستخدام التكامل المحدد .

1 – اجري عملية التكامل

2- حل المعادلة الناتجة تحصل على المطلوب

مثال / جد قيمة a اذا علمت ان $\int_0^a (2x-1)dx=42$

الحل :

$\int_0^a (2x-1)dx=42$

$[x^2-x]_0^a=42$

$a^2-a=42$

$a^2-a-42=0$

$(a-7)(a+6)=0$

$\rightarrow$ اما $a=7$

او $a=-6$

مثال / جد قيمة $a\epsilon R$ اذا علمت ان $\int_a^2 (3+2x)dx = 6$

الحل :

$$\int_a^2 (3+2x)dx = 6$$

$$[3x + x^2]_a^2 = 6$$

$$[6+4] - [3a + a^2] = 6$$

$$a^2 + 3a - 10 + 6 = 0$$

$$a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$(a+4)(a-1) = 0$$

اما $a = -4$

او $a = 1$

مثال / جد قيمة $b\epsilon R$ اذا علمت ان $\int_1^b (13 - 4x)dx = 9$. واجب

المساحات في التكامل

اولا : - المساحة المحددة بمنحني الدالة ومحور السينات :

1 – اجعل الدالة = 0

2 - حل المعادلة الناتجة تحصل على قيم x التي تمثل حدود التكامل ان لم تكن الفترة موجودة

3 – اذا كان السؤال يحوي الفترة $[a\ b]$ و $x \in [a\ ,b]$ نجزئ التكامل واذا كان طرف فيها او لا ينتمي للفترة المعطاة لا يجزئ .

4 - جد المساحة $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

5 – نجري عملية التكامل المحدد نحصل على المساحة

مثال / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ ومحور السينات وعلى الفترة $[- , 3]$

الحل :

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

اما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \in [-1 , 3]$

او $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \in [-1 , 3]$

$$A = \left|\int_{-1}^{3} (X^2 - 2x - 3)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3}\right|$$

$$= \left|[9 - 9 - 9] - \left[-\frac{1}{3} - 1 + 3\right]\right|$$

$$\left|(9) - \left(\frac{-1+6}{3}\right)\right|$$

$$= \left|-9 - \frac{5}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{-27-5}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{-32}{3}\right|$$

$$= \frac{32}{3}$$

مثال / جد المساحة المحددة بالدالة $y = f(x) = x^3 - x$ ومحور السينات

الحل :

$$x^3 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 0 \, , x = 1 \, , x = -1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|(0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين x=2 و x=-2 حيث
$y = f(x) = x^3 - 4x$

الحل :

$x^3 - 4x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$

$x = 0$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$A = \left|\int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2}(x^3 - 4x)dx\right|$

$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}\right|$

$= |(0) - (4-8)| + |(4-8) - (0)|$

$= |4| + |-4|$

$= 4 + 4 = 8$

مثال / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1 , 1]$

الحل :

$$x^4 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^4 - x^2)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^4 - x^2)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$\Rightarrow \left|(0) - \left(\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) - (0)\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3-5}{15}\right| + \left|\frac{3-5}{15}\right|$$

$$= \left|-\frac{2}{15}\right| + \left|-\frac{2}{15}\right| = \frac{4}{15}$$

مثال / جد المساحة المحددة بالدالة $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

الحل :

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 0$$

$$(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$A = \left|\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right|$$

$$\Rightarrow \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2\right|$$

$$\Rightarrow= \left|\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0)\right| + \left|(4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين x =0 و x =3 .

الحل :

$$\sqrt{x+1} = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \notin [0\,,3]$$

$$A = \left|\int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx\right|$$

$$\Rightarrow A = \left|\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^3\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}\right]_0^3\right|$$

$$\Rightarrow \left|\left(\frac{2}{3}\sqrt{(4)^3}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{14}{3}\right|$$

$$= \frac{14}{3}$$

ثانيا : المساحة المحددة بمنحني الدالتين

1 – اجعل الدالة الاولى = الدالة الثانية

2 – صفر المعادلة ثم حلها تحصل على قيم x

3 – نتبع نفس خطوات الطريقة السابقة

مثال / جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = f(x) = x \ , y = g(x) = x^3$

الحل :

$$x^3 = x$$

$$\Rightarrow x^3 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx\right|$$

$$\Rightarrow A = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$\Rightarrow = \left|(0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال / لتكن $y=f(x)=x$ وعلى الفترة $[-1,1]$ ، $y=g(x)=\sqrt[3]{x}$ وعلى الفترة $[-1,1]$ ، جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

الحل :

$$x=\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow x^3=x$$

$$\Rightarrow x^3-x=0$$

$$\Rightarrow x(x^2-1)=0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=0$$

$$(x-1)=0 \Rightarrow x=1$$

$$(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}\left(x-x^{\frac{1}{3}}\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x-x^{1/3})dx\right|$$

$$\Rightarrow A=\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$\Rightarrow=\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$\Rightarrow\left|(0)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-(0)\right|$$

$$\Rightarrow=\left|\frac{-4+6}{8}\right|+\left|\frac{4-6}{8}\right|$$

$$=\left|\frac{2}{8}\right|+\left|-\frac{2}{8}\right|$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

مثال / جد المساحة المحدد بمنحني الدالتين $y = x^4 - 12 \ , y = x^2$

الحل :

$$x^4 - 12 = x^2$$

$$\Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$$

$\Rightarrow$ اما $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, او

$x^2 + 3 = 0$ يهمل

$$A = \left|\int_{-2}^{2}(x^4 - x^2 - 12)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$\Rightarrow A = \left|\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24\right) - \left(-\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 24\right)\right|$$

$$= \left|\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48\right|$$

$$= \left|\frac{192 - 80 - 720}{15}\right|$$

$$= \left|-\frac{608}{15}\right|$$

$$= \frac{608}{15}$$

مثال / جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $g(x) = \frac{1}{2}x$, $f(x) = \sqrt{x-1}$ والمستقيمين x =2 , x =5

الحل :

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 = x - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$A = \left|\int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - (x-1)^{\frac{1}{2}}\right) dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5\right|$$

$$\Rightarrow \left|\left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{25}{4} - \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{25}{4} - \frac{17}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{75-68}{12}\right|$$

$$= \frac{7}{12}$$